



(Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

Revue : CaMUS (Cahiers Mathématiques de l'Université de Sherbrooke)

Volume : 1

Année : 2010

Éditeur : Université de Sherbrooke. Département de Mathématiques

URI : Repéré à : <http://camus.math.usherbrooke.ca/revue.html>

Page vide laissée intentionnellement



Volume 1 Cahiers Mathématiques de
l'Université de Sherbrooke

D. Ait Aoudia <i>Caractérisation de la loi normale</i>	1
D. Francoeur <i>Machines à vecteurs de support : une introduction</i>	7
J.-P. Burelle <i>Triangulation minimale de cubes</i>	26
R. Lareau-Dussault <i>La visualisation de la sphère de dimension trois</i>	32
J.-S. Fraser Martineau et D. Lavertu <i>Frises et triangulations de polygones</i>	39
N. Bureau <i>Rotation d'un objet rigide</i>	60
R. Gagné <i>Visualisation de fonctions générant un point de selle multiple dans \mathbb{R}^n</i>	69
F. Dusseault-Bélanger <i>Quaternions et rotations</i>	91
G. Dupont <i>Mutations de carquois</i>	99

CARACTÉRISATION DE LA LOI NORMALE

DJILALI AIT AOUDIA

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous nous intéressons à deux des caractérisations les plus célèbres de la loi normale : soient le théorème de Bernstein et celui de Geary concernant l'indépendance de la moyenne et de la variance expérimentales. Nous présenterons succinctement une approche différente qui dégage la structure des moments qui découlent des hypothèses de ces théorèmes.

1. Introduction

La loi normale est l'une des principales lois de distributions de probabilité formulée par le mathématicien français Abraham de Moivre en 1733 et elle a été mise en évidence par Gauss au XIXe siècle. L'expérience montre qu'un grand nombre de caractères physiques, biométriques, peuvent être modélisés avec succès par une loi normale. Une des explications de ce phénomène est fournie par le théorème centrale limite. En effet, de nombreux phénomènes sont dus à l'addition d'un grand nombre de petites perturbations aléatoires. Dans cette note, nous revisitons deux des caractérisations les plus célèbres de la loi normale, notamment celle de Bernstein [1] concernant l'indépendance de $X - Y$ et $X + Y$ lorsque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, ainsi que celle de Geary [3] concernant l'indépendance de la moyenne et de la variance expérimentales. Ce papier a pour objectif de présenter des approches un peu différentes pour établir ces résultats en s'appuyant sur le fait qu'une loi normale est caractérisée par ses moments, ce qui n'est pas vrai en général (voir [2], exemple 2.3.5 page 64).

2. Le théorème de Bernstein

Le théorème ci-dessous dû à Bernstein [1] est l'un des résultats fondamentaux qui caractérise la loi normale par l'indépendance linéaire, important en particulier

Je tiens à remercier très chaleureusement les Professeurs Éric Marchand et François Perron pour leurs conseils et leurs commentaires.

par son extension et son emploi à des résultats plus généraux.

Théorème 1 (S. Bernstein, 1941)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, alors

$$(2.1) \quad (U = X - Y \text{ indépendant de } V = X + Y) \iff \begin{cases} X \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(X), \sigma^2) \\ \text{et} \\ Y \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(Y), \sigma^2) \end{cases}$$

Démonstration.

La réciproque est un exercice élémentaire. En effet, puisque le vecteur (dans \mathbb{R}^2) (U, V) est gaussien (car toute combinaison linéaire de ses composantes est de loi gaussienne), pour montrer l'indépendance de U et V , il suffit de démontrer que $\text{Cov}(U, V) = 0$. Pour cela, on vérifie que

$$\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(X - Y, X + Y) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0.$$

Nous proposons deux méthodes pour l'implication : la première s'appuyant sur le fait qu'une loi normale est caractérisée par ses moments et la deuxième en exploitant la structure induite sur les fonctions caractéristiques de X et de Y . Notons d'abord que les conditions du théorème implique que tous les moments de X et Y existent (voir par exemple [4], Lemme 5.3.2, page 65) et sans perte de généralité, nous supposons que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ et $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$.

Première méthode

Commençons par montrer que $\mathbb{E}[X^n] = [X^n]$ pour tout $n \geq 0$. Nous allons procéder par récurrence sur n . C'est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons le vrai pour $n = 0, 1, \dots, m-1$ et montrons le pour $n = m$. Un calcul simple nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^m - Y^m] &= \mathbb{E}[(X - Y)(X^{m-1} + X^{m-2}Y + \dots + Y^{m-1})] \\ &= \mathbb{E}\left[(X - Y)\{(X + Y)^{m-1} - (X + Y)^{m-1} + \sum_{i=0}^{m-1} X^{m-1-i}Y^i\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X - Y)\{(X + Y)^{m-1} - \sum_{i=0}^{m-1} [\binom{m-1}{i} - 1] X^{m-1-i}Y^i\}\right] \\ &= \mathbb{E}[(X - Y)(X + Y)^{m-1}] - \mathbb{E}\left[(X - Y) \sum_{i=0}^{m-1} A_{i,m} X^{m-1-i}Y^i\right] \end{aligned}$$

avec

$$A_{i,m} = [\binom{m-1}{i} - 1] = A_{m-i-1,m}.$$

Mais d'une part, par l'indépendance de $X - Y$ et $X + Y$, on a

$$\mathbb{E}[(X - Y)(X + Y)^{m-1}] = [\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)] \mathbb{E}[(X + Y)^{m-1}] = 0.$$

D'autre part, par l'hypothèse de récurrence, on a bien

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(X - Y)(\sum_{i=0}^{m-1} A_{i,n} X^{m-1-i} Y^i)] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{m-1} A_{i,m} X^{m-i} Y^i \right] - \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{m-1} A_{i,m} X^{m-i-1} Y^{i+1} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} [A_{i,m} X^{m-i} Y^i] - \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} [A_{m-i-1,m} X^i Y^{m-i}] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} [A_{i,n} X^{m-i} Y^i] - \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} [A_{i,m} X^i Y^{m-i}] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} A_{i,m} (\mathbb{E} [X^{m-i}] \mathbb{E} [Y^i] - \mathbb{E} [X^i] \mathbb{E} [Y^{m-i}]) \quad \{\text{indépendance}\} \\
&= 0 \quad \{\text{hypothèse de récurrence}\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que

$$\mathbb{E} [X^m - Y^m] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} [X^n] = \mathbb{E} [Y^n] = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Maintenant, soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée et $\mathbb{E} [Z_i^2] = \sigma^2$. Donc pour montrer le théorème, il suffit de montrer que $\mathbb{E} [X^n] = \mathbb{E} [Z_1^n]$ pour tout $n \geq 0$. C'est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons le vrai pour $n = 0, 1, \dots, m$ et montrons le pour $n = m + 1, m \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [X^{m+1} + Y^{m+1}] &= \mathbb{E} \left[(X + Y)^{m-1} \{ (X - Y)^2 + 4XY \} \right. \\
&\quad \left. - \{ (X + Y)^{m+1} - (X^{m+1} + Y^{m+1}) \} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[(X + Y)^{m-1} (X - Y)^2 - \sum_{k=1}^m a_{mk} X^k Y^{m+1-k} \right] \\
&= \mathbb{E} [(X + Y)^{m-1}] \mathbb{E} [(X - Y)^2] \\
&\quad - \sum_{k=1}^m a_{mk} \mathbb{E} [X^k] \mathbb{E} [Y^{m+1-k}] \\
&= \mathbb{E} [(Z_1 + Z_1)^{m-1}] \mathbb{E} [(Z_1 - Z_2)^2] \\
&\quad - \sum_{k=1}^m a_{mk} \mathbb{E} [Z_1^k] \mathbb{E} [Z_2^{m+1-k}] \\
&= \mathbb{E} \left[(Z_1 + Z_1)^{m-1} (Z_1 - Z_2)^2 - \sum_{k=1}^m a_{mk} Z_1^k Z_2^{m+1-k} \right] \\
&= \mathbb{E} [Z_1^{m+1} + Z_2^{m+1}],
\end{aligned}$$

avec $a_{mk} = \binom{m+1}{k} - 4\binom{m-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq m$.

Et le théorème est démontré, en s'appuyant sur le fait que la loi normale est

caractérisée par ses moments (voir par exemple [4], corollary 2.3.3).

Deuxième méthode

Soient

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[e^{itY}], \quad V = X + Y \text{ et } W = (X - Y)^2.$$

Il vient

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathbb{E}[We^{itV}] &= \mathbb{E}[(X^2 - 2XY + Y^2)e^{it(X+Y)}] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[X^2e^{itX}]}_{-\phi''(t)} \underbrace{\mathbb{E}[e^{itY}]}_{\phi(t)} - 2 \underbrace{\mathbb{E}[Xe^{itX}]}_{-i\phi'(t)} \underbrace{\mathbb{E}[Ye^{itY}]}_{-i\phi'(t)} \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}[Y^2e^{itY}]}_{-\phi''(t)} \underbrace{\mathbb{E}[e^{itX}]}_{\phi(t)} \\ &= -2\phi''(t)\phi(t) + 2(\phi'(t))^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \mathbb{E}[We^{itV}] &= \mathbb{E}[W]\mathbb{E}[e^{itV}] \quad (\text{indépendance}) \\ &= \mathbb{E}[(X - Y)^2]\mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] \\ &= \mathbb{E}[(X^2 - 2XY + Y^2)]\mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] \\ &= [\mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y^2)]\mathbb{E}[e^{itX}]\mathbb{E}[e^{itY}] \\ &= 2\sigma^2(\phi(t))^2, \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad (a) + (b) \implies \begin{cases} -\phi''(t)\phi(t) + (\phi'(t))^2 = \sigma^2(\phi(t))^2 \\ \text{et} \\ \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \implies \begin{cases} \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)' = -\sigma^2 \\ \text{et} \\ \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0 \end{cases} \implies \phi(t) = e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}} \quad \square$$

3. Le théorème de Geary

La caractérisation de la loi normale par l'indépendance de la moyenne et de la variance est donnée par le théorème suivant dû à R.C. Geary [3].

Théorème 2 (R.C. Geary, 1936)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi et de variances finies. On pose

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}.$$

Alors

$$\{\bar{X} \text{ indépendant de } S^2\} \iff \{X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Démonstration.

Notons que notre démonstration se compare à celle de Quine [7], mais elle est un peu plus directe. L'approche que nous présentons est analogue à la deuxième démonstration ci-dessus du résultat de Bernstein. En effet, sans perte de généralité, nous supposons d'abord (voir Remarque à la suite de la démonstration) que

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

On a d'abord $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0, \forall i \neq j$ et

$$\begin{aligned} nS^2 &= n \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2}{n} \sum_{i < j} X_i X_j \end{aligned}$$

et ainsi le résultat bien connu

$$\mathbb{E}[nS^2] = (n-1)\sigma^2.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} (c) \quad \mathbb{E}[nS^2 e^{itn\bar{X}}] &= \mathbb{E}[nS^2] \mathbb{E}[e^{itn\bar{X}}] \\ &= \mathbb{E}[nS^2] \mathbb{E}[e^{it \sum_{j=1}^n X_j}] \\ &= (n-1)\sigma^2 \underbrace{\mathbb{E}[e^{itX_1}]}_{\phi(t)} \underbrace{\mathbb{E}[e^{itX_2}]}_{\phi(t)} \dots \underbrace{\mathbb{E}[e^{itX_n}]}_{\phi(t)} \\ &= (n-1)\sigma^2 \phi^n(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad \mathbb{E}[nS^2 e^{itn\bar{X}}] &= \mathbb{E} \left[\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{j=1}^n X_j^2 - \frac{2}{n} \sum_{j < k} X_j X_k \right) e^{it \sum_{j=1}^n X_j} \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_j \underbrace{\mathbb{E} \left[X_j^2 e^{itX_j} e^{it \sum_{k \neq j} X_k} \right]}_{-\phi''(t)\phi^{n-1}(t)} \\ &\quad - \frac{2}{n} \sum_{j < k} \underbrace{\mathbb{E} \left[X_j e^{itX_j} X_k e^{itX_k} e^{it \sum_{h \neq j,k} X_h} \right]}_{-\phi'^2(t)\phi^{n-2}(t)} \\ &= -\left(1 - \frac{1}{n}\right) n \phi''(t) \phi^{n-1}(t) + \frac{2}{n} \frac{n(n-1)}{2} \phi'^2(t) \phi^{n-2}(t), \end{aligned}$$

et donc

$$(c) + (d) \implies -\phi'' \phi + (\phi')^2 = \sigma^2 \phi^2 \implies \phi(t) = e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}}.$$

La réciproque est mieux connue et élémentaire. Soient X_1, \dots, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi normale avec $\mathbb{V}(X_1) = \sigma^2$. Pour montrer que \bar{X} et S^2 sont indépendantes, il suffit de montrer que \bar{X} est indépendante du vecteur $M = (X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$, puisque S^2 est M -mesurable. Or le vecteur $(\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ est gaussien (car toute combinaison linéaire de ses composantes est une combinaison linéaire des X_i), et ainsi pour démontrer

l'indépendance de \bar{X} et M , il suffit de vérifier que $\mathbb{C}ov(\bar{X}, X_i - \bar{X}) = 0$ pour tout i . Pour cela, on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov(\bar{X}, X_i) &= \mathbb{C}ov\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{C}ov(X_i, X_i) \\ &= \frac{\sigma^2}{n},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov(\bar{X}, X_i - \bar{X}) &= \mathbb{C}ov(\bar{X}, X_i) - \mathbb{V}ar(\bar{X}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Remarques

1) Si $\mathbb{E}[X_i] = m \neq 0$, on peut poser $L_i = X_i - m$ et $\bar{L} = \bar{X} - m$. Alors, on a que

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (L_i - \bar{L})^2}{n},$$

que l'indépendance de S^2 et \bar{X} équivaut à l'indépendance de S^2 et \bar{L} , et on peut donc prendre $\mu = 0$ sans perte de généralité.

2) Le théorème de Geary est une généralisation de celui de Bernstein car, pour $n = 2$, $\bar{X} = X_1 + X_2$ et $S^2 = (X_1 - X_2)^2/2$.

Références

- [1] S. Bernstein. *On a characteristic property of the normal law*. Trud. Leningrad Poly. Inst. 3. (1941)
- [2] Casella, G and Berger, R. L. *Statistical inference*. Wadsworth & Brooks/Cole. (1990)
- [3] R.C. Geary. *Distribution of Student's ratio for non-normal samples*. J.Roy. Statist. Soc. Suppl 3. (1936)
- [4] W. Bryc. *The normal distribution. Characterizations with applications*. Lecture notes in Statistics, 100. Springer, New York. (2005)
- [5] E. Lukacs. *A characterisation of the normal distribution*. Ann. math. Statist. 13 (1942)
- [6] N.L. Johnson. S. Kotz and N. Balakrishnan. *Continuous univariate distributions, volume 1*. Wiley, New York, second edition. (1994)
- [7] M.P Quine. *On three characterizations of the normal distribution*. Prob. and Math. Stat. Vol 14. (1993)

MACHINES À VECTEURS DE SUPPORT—UNE INTRODUCTION

DOMINIK FRANCOEUR

RÉSUMÉ. Les machines à vecteurs de support, ou SVM (Support Vector Machines), sont une méthode relativement récente de résolution de problèmes de classification (trier des individus en fonction de leurs caractéristiques) qui suscite beaucoup d'intérêt, à la fois pour son élégance et ses bonnes performances. Cet article explique leur fonctionnement, puis présente une importante variante, indispensable à l'application de la méthode en pratique.

La classification consiste à classer des individus en fonction de certaines de leurs caractéristiques. Il existe différents types de classification, mais un des plus intuitifs et des plus utilisés est la classification supervisée. L'idée de la classification supervisée est d'apprendre une règle de classement à partir d'un ensemble de données dont le classement est déjà connu. Une fois la règle apprise, il est possible de l'appliquer pour catégoriser de nouvelles données, dont le classement est inconnu. Les *machines à vecteurs de support*, ou *SVM* (*Support Vector Machines*), sont une technique relativement récente (elles ont été introduites en 1992 par Vladimir Vapnik, Bernhard Boser et Isabelle Guyon) de classification supervisée qui suscite beaucoup d'intérêt pour ses bonnes performances dans un large éventail d'applications pratiques.

Cet article constitue une introduction aux machines à vecteurs de support. Après la présentation de certains éléments essentiels de la théorie de l'optimisation, leur fonctionnement sera expliqué, d'abord dans le cas simple où les données sont linéairement séparables, puis dans le cas général où elles ne le sont pas nécessairement. Enfin, le concept de marge souple, très important pour l'utilisation des SVM dans la pratique, sera introduit.

J'aimerais remercier le CRSNG pour leur support financier, ainsi que Jessica Lévesque pour son support et ses nombreuses révisions de mon article.

1. Éléments de la théorie de l'optimisation

1.1. Introduction à l'optimisation

Soit f une fonction dérivable définie sur un domaine ouvert D dont on cherche à connaître le minimum. Supposons que ce minimum est atteint au point \mathbf{x}^* , c'est-à-dire que $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in D$. Alors, nécessairement, $f'(\mathbf{x}^*) = 0$. Par conséquent, afin de déterminer le minimum de la fonction f , il suffit de considérer les points où la dérivée de f s'annule.

Cependant, supposons maintenant que le problème ne soit plus simplement de déterminer le minimum de la fonction f , mais plutôt de trouver le point \mathbf{x} qui minimise la valeur de $f(\mathbf{x})$ tout en respectant aussi la contrainte $g(\mathbf{x}) = 0$, où g est aussi une fonction définie sur le domaine D . Dans ce cas, ce point n'annulera pas nécessairement la dérivée de f , puisque l'ajout de la contrainte restreint f à un ensemble $S = \{\mathbf{x} \in D : g(\mathbf{x}) = 0\}$ et que le point qui minimise f dans S ne la minimise pas nécessairement dans D .

Le but de l'optimisation est de trouver une solution à un tel problème. De manière générale, un problème d'optimisation est un problème dans lequel on cherche un point qui minimise ou qui maximise une certaine fonction et qui est sujet à certaines contraintes. Il s'agit donc d'un problème s'écrivant ainsi :

$$\text{Minimiser } f(\mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in D \text{ sujet à } \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0 & i = 1, \dots, k, \\ h_j(\mathbf{x}) = 0 & j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

La fonction f est appelée la fonction objectif, les fonctions g_i ($i = 1, \dots, k$) sont appelées les contraintes d'inégalité et les fonctions h_j ($j = 1, \dots, m$) sont appelées les contraintes d'égalité. Puisque maximiser $f(\mathbf{x})$ est équivalent à minimiser $-f(\mathbf{x})$ et que toutes les contraintes peuvent être réécrites soit sous la forme $g(\mathbf{x}) \leq 0$ ou sous la forme $h(\mathbf{x}) = 0$, tous les problèmes d'optimisation peuvent s'écrire sous la forme ci-dessus.

1.2. La convexité

Introduisons maintenant quelques définitions. Un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si pour tout $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ et pour tout $\theta \in]0, 1[$,

$$(\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta) \mathbf{x}_2) \in D.$$

Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* si pour tout $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ (où D est un ensemble convexe) et pour tout $\theta \in]0, 1[$,

$$f(\theta \mathbf{x}_1 + (1 - \theta) \mathbf{x}_2) \leq \theta f(\mathbf{x}_1) + (1 - \theta) f(\mathbf{x}_2).$$

On dit que la fonction f est *strictement convexe* si l'inégalité précédente est stricte.

Enfin, un problème d'optimisation est dit *convexe* si le domaine D , la fonction objectif et toutes les contraintes sont convexes.

La convexité possède une propriété très intéressante qui sera essentielle plus loin : si f est une fonction convexe et \mathbf{x}^* un point tel que

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} = 0,$$

alors \mathbf{x}^* est un minimum global de f . De plus, si f est strictement convexe, alors \mathbf{x}^* est l'unique point où f atteint ce minimum global (voir [1] pour la

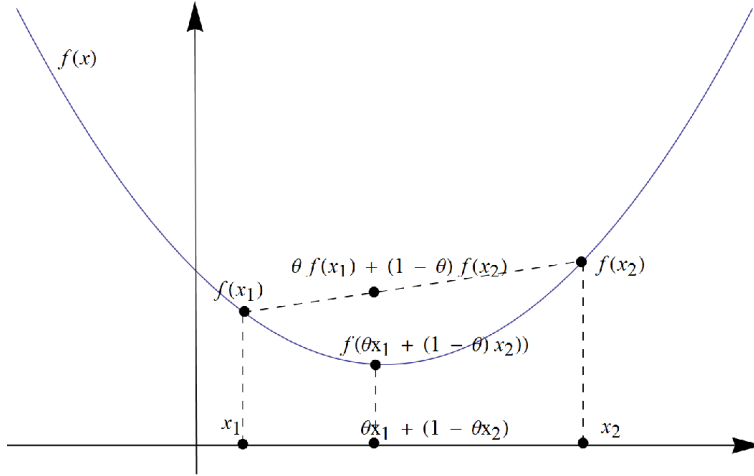


FIGURE 1. Une fonction convexe

démonstration). Notons qu'ici et pour le reste de ce texte, si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, alors

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_a)}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_a)}{\partial x_n} \right).$$

1.3. La dualité et le théorème de Kuhn-Tucker

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\text{minimiser } f(\mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in D \text{ sujet à } \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0 & i = 1, \dots, k, \\ h_j(\mathbf{x}) = 0 & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

où $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction objectif, $g_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, k$) sont les contraintes d'inégalité et $h_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$) sont les contraintes d'égalité. À partir de ce problème, il est possible de définir la fonction suivante, appelée le Lagrangien :

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k \alpha_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \beta_j h_j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

où $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$), $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_k(\mathbf{x}))$ et $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x}))$. Les constantes α_i ($i = 1, \dots, k$) et β_j ($j = 1, \dots, m$) sont appelées les *multiplicateurs de Lagrange*.

Il est possible d'utiliser le Lagrangien pour construire un nouveau problème d'optimisation, appelé le problème dual, qui possède des liens très intéressants avec le problème original, que nous appellerons dorénavant le problème primal.

Considérons la fonction

$$\theta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \inf_{\mathbf{x} \in D} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

Il s'agit d'une fonction qui prend la valeur minimale du Lagrangien pour un $\boldsymbol{\alpha}$ et un $\boldsymbol{\beta}$ donnés. Soumettons maintenant cette fonction à la contrainte $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$. Alors, si $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ respecte cette contrainte,

$$\theta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \leq f(\mathbf{x})$$

pour tout $\mathbf{x} \in D$ tel que $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ($i = 1, \dots, k$) et $h_j(\mathbf{x}) = 0$ ($j = 1, \dots, m$).

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \theta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \inf_{\mathbf{u} \in D} L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\ &\leq L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\ &= f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ &\leq f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

puisque $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0$, et $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$.

Une conséquence immédiate de ce fait est que la valeur maximale que peut prendre $\theta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ en respectant la contrainte $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$ est bornée supérieurement par la valeur minimale du problème primal, c'est-à-dire que

$$\sup \{ \theta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) : \boldsymbol{\alpha} \geq 0 \} \leq \inf \{ f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \}.$$

Par conséquent, s'il existe une solution réalisable \mathbf{x}^* du problème primal telle que $f(\mathbf{x}^*) = \theta(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$, avec $(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*) \in \mathbb{R}^{l+m}$ et $\boldsymbol{\alpha}^* \geq 0$, alors \mathbf{x}^* correspond au minimum du problème primal et $(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ correspond au maximum de $\theta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ sujette à la contrainte $\boldsymbol{\alpha} \geq 0$.

Ceci amène à définir ainsi un problème d'optimisation dual :

$$\text{maximiser } \theta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \text{ sujet à } \boldsymbol{\alpha} \geq 0.$$

Si la valeur maximale du problème dual correspond à la valeur minimale du problème primal, alors il est possible de résoudre le problème dual pour découvrir la solution du problème primal. Cependant, en général, il n'est pas toujours certain que les solutions du problème primal et du problème dual coïncident. Il peut en effet exister un *écart de dualité* (*duality gap*) entre les deux solutions. Cependant, le théorème de la dualité forte assure que dans le cas où la fonction f est convexe et où les contraintes sont des fonctions affines, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, avec A une matrice et \mathbf{b} un vecteur, l'écart de dualité est nul, et donc la valeur maximale du problème dual correspond à la valeur minimale du problème primal.

Ceci permet d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une solution du problème primal soit optimale. Ces conditions sont présentées dans le théorème de Karush-Kuhn-Tucker.

Théorème de Karush-Kuhn-Tucker : Soit un problème d'optimisation convexe de domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\text{minimiser } f(\mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in D \text{ sujet à } \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0 & i = 1, \dots, k, \\ h_j(\mathbf{x}) = 0 & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

avec $f \in C^1$ et toutes les contraintes affines. Alors, un point \mathbf{x}^* est un optimum si et seulement si il existe des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*$ tels que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \mathbf{x}} &= 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= 0, \\ \alpha_i^* g_i(\mathbf{x}^*) &= 0, & i = 1, \dots, k, \\ g_i(\mathbf{x}^*) &\leq 0, & i = 1, \dots, k, \\ \alpha_i^* &\geq 0, & i = 1, \dots, k. \quad \square \end{aligned}$$

Ces conditions correspondent à imposer l'existence d'une solution réalisable du dual ayant la même valeur. En effet, imposer

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

revient à s'assurer que $\theta(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*) = \inf_{\mathbf{x} \in D} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$, puisque le minimum du Lagrangien sans contrainte est atteint lorsque sa dérivée est nulle. En effet, puisque la fonction objectif est une fonction convexe et que les contraintes sont des fonctions affines, il est simple de vérifier que le Lagrangien est une fonction convexe. Or, on a vu que tout point qui annule la dérivée d'une fonction convexe est un minimum global de cette fonction. Par conséquent, le minimum du Lagrangien sans contraintes est bien atteint lorsque sa dérivée est nulle.

Les conditions $\frac{\partial L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$ et $g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0, i = 1, \dots, k$ sont simplement les contraintes du problème primal (remarquons que dériver le Lagrangien par rapport à β_j donne h_j), et visent seulement à assurer que la solution est réalisable pour le problème primal. Ensuite, la condition $\boldsymbol{\alpha}^* \geq 0$ assure que $(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ est une solution réalisable du dual. Enfin, la condition $\alpha_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$, appelée la condition complémentaire de Karush-Kuhn-Tucker, assure que $\theta(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*) = f(\mathbf{x}^*)$. En effet, on a alors $\beta_j h_j(\mathbf{x}^*) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$ et $\alpha_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Par conséquent,

$$f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\alpha}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\beta}^{*T} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*) = \theta(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*).$$

Comme $f(\mathbf{x}^*) = \theta(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$, \mathbf{x}^* est une solution optimale pour le problème primal et $(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$ est une solution optimale pour le dual. Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker peuvent être très utiles pour vérifier si une solution est optimale.

2. Machines à vecteurs de support pour données linéairement séparables

2.1. Introduction aux machines à vecteurs de support

Maintenant que certains éléments importants de la théorie de l'optimisation ont été présentés, nous sommes en mesure d'introduire les machines à vecteurs de support. Les machines à vecteurs de support (SVM) sont un algorithme dont le but est de résoudre les problèmes de discrimination à deux classes. On appelle

problème de discrimination à deux classes un problème dans lequel on tente de déterminer la classe à laquelle appartient un individu (individu est ici employé au sens de constituant d'un ensemble) parmi deux choix possibles. En réalité, plusieurs méthodes ont été suggérées pour étendre l'application des SVM aux problèmes de discrimination à plus de deux classes (voir par exemple [3] et [4]), et il existe aussi une modification qui permet de les utiliser pour la régression (voir notamment [2] et [6]), mais nous nous concentrerons ici sur les problèmes de discrimination à deux classes.

Pour ce faire, on utilise les caractéristiques connues de cet individu. Ces n caractéristiques sont représentées par un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La classe à laquelle appartient l'individu est représentée par $y \in \{-1, 1\}$, où une des classes possible est représentée par -1 et l'autre par 1 . Par conséquent, avec cette notation, le problème est de déterminer la valeur de y en se servant de \mathbf{x} .

Pour y parvenir, les machines à vecteurs de support utilisent un ensemble de données pour lesquelles le classement est déjà connu et s'en servent pour construire une règle qui permet d'effectuer une bonne classification. Cet ensemble de données est appelé l'ensemble d'apprentissage. La règle trouvée avec l'ensemble d'apprentissage doit être la plus générale possible, puisqu'il faut aussi qu'elle soit bonne pour de nouvelles données qui n'étaient pas dans l'ensemble d'apprentissage. Nous présentons ici comment les SVM font pour trouver cette règle dans le cas le plus simple possible, c'est-à-dire le cas où les données sont linéairement séparables. Les autres cas seront traités dans les sections 3 et 4.

2.2. Hyperplan séparateur

Supposons que nous disposons d'un ensemble d'apprentissage de l données de la forme $(\mathbf{x}_i, y_i) \in \mathbb{R}^n \times \{-1, 1\}$ ($i = 1, \dots, l$), dont nous voulons nous servir pour déterminer une règle permettant de classer les données. Supposons aussi que ces données sont linéairement séparables, c'est-à-dire qu'il existe un hyperplan dans \mathbb{R}^n tel que toutes les données appartenant à la classe 1 se retrouvent d'un côté de l'hyperplan alors que celles de la classe -1 se situent de l'autre côté.

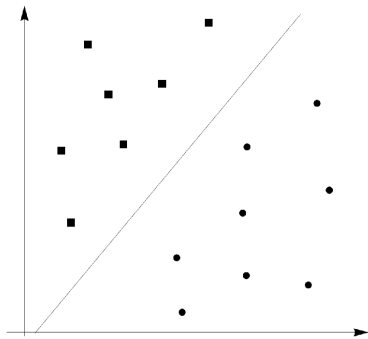


FIGURE 2. Des données linéairement séparables

Plus formellement, les données sont dites linéairement séparables s'il existe un hyperplan

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$$

tel que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b > 0$ pour tout \mathbf{x} appartenant à la classe 1, et $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b < 0$ pour tout \mathbf{x} appartenant à la classe -1 , avec $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des coefficients de l'hyperplan et $b \in \mathbb{R}$ un scalaire appelé le biais (remarquons que tout hyperplan peut s'écrire sous cette forme). Nous dirons d'un tel hyperplan qu'il sépare les données.

Sous l'hypothèse que les données sont linéairement séparables, trouver une règle pour les classer est très simple. En effet, il suffit de prendre un hyperplan qui sépare les classes, puis de classer les données selon le côté de l'hyperplan où elles se trouvent. Plus formellement, soit

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$$

un hyperplan qui sépare les données. Alors, il suffit d'utiliser la fonction suivante (parfois appelée la *fonction indicatrice*) pour effectuer la classification :

$$\text{Classe}(\mathbf{x}) = \text{signe}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b),$$

où

$$\text{signe}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b < 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0 \\ 1 & \text{si } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b > 0 \end{cases}$$

Cette fonction classe les données par rapport au côté de l'hyperplan où elles se trouvent. On remarque que si un ensemble de données est séparé par un hyperplan, il sera parfaitement classé par cette fonction. Notons que si une donnée est directement sur l'hyperplan (ce qui peut arriver en considérant des données qui ne sont pas dans l'ensemble d'apprentissage), elle sera assignée à la classe 0, ce qui signifie qu'elle ne peut être classée par le modèle actuel. Dans ce cas, il est possible de la laisser inclassée, d'utiliser une autre règle ou de l'assigner aléatoirement à l'une des deux classes.

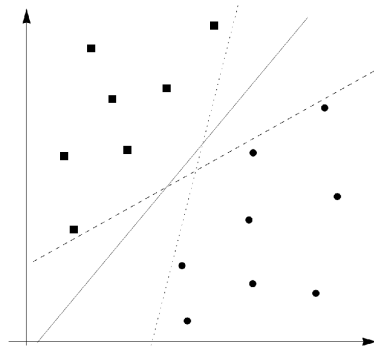


FIGURE 3. Il existe une infinité d'hyperplans pouvant séparer les données

Grâce à la fonction indicatrice, on constate qu'il suffit de trouver un hyperplan qui sépare les données pour déterminer une règle permettant de les classer. Cependant, si les données sont linéairement séparables, il existe une infinité d'hyperplans qui peuvent servir de séparateurs. L'idée des machines à vecteurs de support est de choisir le meilleur hyperplan, c'est-à-dire celui qui donnera la règle

qui se généralisera le mieux à d'autres données que celles de l'ensemble d'apprentissage. Afin de déterminer ce qui caractérise le meilleur hyperplan, introduisons le concept de marge.

2.3. Marge et hyperplan canonique

Définissons la marge d'un hyperplan comme étant la distance entre l'hyperplan et la donnée la plus proche. Plus formellement, si $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, b)$ représente la distance euclidienne entre le point \mathbf{x} et l'hyperplan $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$, alors la marge M est définie ainsi :

$$M = \min \{ \text{dist}(\mathbf{x}_i, \mathbf{w}, b) : i = 1, \dots, l \}$$

où les \mathbf{x}_i sont les données de l'ensemble d'apprentissage. Par abus de langage, nous dirons dans ce texte qu'un point se trouve *sur la marge* si sa distance avec l'hyperplan correspond exactement à la marge.

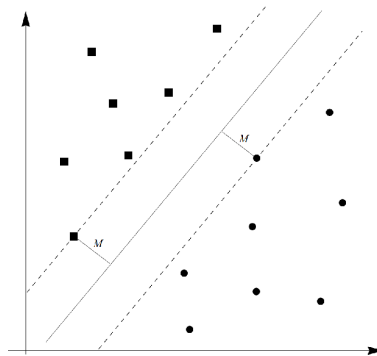


FIGURE 4. La marge

D'après un résultat de la théorie de l'apprentissage statistique, l'hyperplan qui aura la meilleure généralisation est celui qui possède la plus grande marge (le lecteur intéressé pourra consulter [2] et [5] pour plus de détails). Ce concept est à la base des machines à vecteurs de support. Dans le cas le plus simple, c'est-à-dire celui où les données sont linéairement séparables, les SVM trouvent l'hyperplan qui sépare les données avec la plus vaste marge possible, puis utilisent cet hyperplan pour classer de nouvelles données à l'aide de la fonction indicatrice donnée plus haut.

Toutefois, le problème de trouver l'hyperplan avec la marge maximale est mal posé, puisqu'il existe en réalité une infinité de manières différentes d'écrire le même hyperplan. En effet, supposons que l'hyperplan

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$$

soit un hyperplan dont la marge est maximale, et soit $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Alors, l'hyperplan

$$\lambda \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + \lambda b = 0$$

est en réalité le même hyperplan et sépare les données, puisque λ est positif. Par conséquent, $\lambda \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + \lambda b = 0$ correspond aussi à l'hyperplan dont la marge est maximale, mais possède un vecteur des coefficients et un biais différents (si $\lambda \neq 1$).

Le nombre infini de manières d'écrire la solution du problème de l'hyperplan avec la plus vaste marge complique sa résolution. Afin de rendre le problème bien posé, introduisons le concept d'*hyperplan canonique*. Un hyperplan $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$ est dit canonique si

$$\min \{|\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b| : i = 1, \dots, l\} = 1,$$

où les \mathbf{x}_i sont les données d'apprentissage.

On peut montrer que ce minimum correspond aux données qui sont directement sur la marge.

On peut aussi montrer que tout hyperplan qui sépare les données peut s'écrire sous forme canonique et qu'il n'existe qu'une seule façon d'écrire un hyperplan pour qu'il soit canonique. Ainsi, en ne considérant que les hyperplans canoniques, chaque hyperplan s'écrit de manière unique. De plus, il n'existe qu'un seul hyperplan pour lequel la marge est maximale. Ceci deviendra évident un peu plus loin, puisque le vecteur des coefficients de l'hyperplan sera exprimé comme étant le point qui minimise une fonction strictement convexe (rappelons que les fonctions strictement convexes n'ont qu'un unique minimum global). Par conséquent, en ne considérant que les hyperplans canoniques, le problème de trouver l'hyperplan avec la plus grande marge est bien posé.

2.4. Trouver l'hyperplan

On peut montrer que pour un hyperplan canonique $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$, la marge M est donnée par l'expression

$$M = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|},$$

où $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2}$. On voit donc que plus $\|\mathbf{w}\|$ est petite, plus la marge de l'hyperplan canonique correspondant est grande. Ainsi, afin de trouver l'hyperplan qui sépare le mieux les données, il faut trouver celui qui respecte les conditions d'un hyperplan canonique et pour lequel $\|\mathbf{w}\|$ est minimale.

La recherche du meilleur hyperplan peut donc s'écrire sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\text{minimiser } \|\mathbf{w}\| \text{ sujet à } y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, l.$$

Les contraintes $y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1$, $i = 1, \dots, l$ assurent d'une part que l'hyperplan sépare les données correctement, et d'autre part qu'il est canonique. En effet, $y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) > 0$ si et seulement si $\text{signe}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) = y_i$, donc si et seulement si \mathbf{x}_i est du bon côté de l'hyperplan. Ainsi, l'hyperplan doit correctement séparer les données. Ensuite, on peut montrer qu'imposer $y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1$ assure que pour toutes les données qui ne sont pas sur la marge, $|\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b| > 1$ et que $|\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b| = 1$ pour les données sur la marge, donc que l'hyperplan est canonique.

Nous avons ainsi formulé un problème d'optimisation dont la solution optimale est l'hyperplan canonique séparant les données avec la plus vaste marge possible. Cependant, il est possible de formuler un problème équivalent, mais avec une fonction objectif plus simple. En effet, comme

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}},$$

minimiser $\|\mathbf{w}\|$ est équivalent à minimiser $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$. Évidemment, minimiser $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ est équivalent à minimiser $\frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ (cette petite modification permet d'éviter d'avoir une constante dans la représentation duale du problème, comme nous le verrons un peu plus loin). Par conséquent, afin de trouver l'hyperplan canonique qui sépare les données avec la plus grande marge possible, il suffit de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{minimiser } \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \text{ sujet à } y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, l.$$

Une propriété très intéressante de ce problème est que

$$f(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = w_1^2 + \dots + w_n^2$$

est une fonction strictement convexe. Ceci assure qu'il n'y a pas de minimum relatif et qu'il n'existe qu'une unique solution optimale.

2.5. Représentation duale

Il serait possible de résoudre le problème d'optimisation ci-dessus directement. Toutefois, sa représentation duale possède des propriétés très intéressantes qui auront des répercussions majeures lorsque nous considérerons les machines à vecteurs de supports pour le cas où les données ne sont pas linéairement séparables.

Commençons tout d'abord par écrire le Lagrangien. Pour ce faire, il est nécessaire de réécrire les contraintes ainsi :

$$-(y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Le Lagrangien est

$$L(\mathbf{w}, b, \alpha) = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} - \sum_{i=1}^l \alpha_i (y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1).$$

Il faut maintenant calculer la fonction objectif du problème dual. Rappelons que cette fonction correspond à la valeur minimale du Lagrangien pour un α donné. Or, ce minimum correspond au point où la dérivée du Lagrangien par rapport aux variables du primal est nulle. On a donc ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{w}, b, \alpha)}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{w} - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i = 0, \\ \frac{\partial L(\mathbf{w}, b, \alpha)}{\partial b} &= - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0, \end{aligned}$$

ce qu'il est possible de réécrire de cette manière :

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \text{ et } \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0.$$

Utilisons ces équations pour réécrire le Lagrangien minimal uniquement en fonction des variables duales :

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} - \sum_{i=1}^l \alpha_i (y_i (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1) \\ &= \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j).\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons le problème dual suivant :

$$\begin{aligned}\text{maximiser } & \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \\ \text{sujet à } & \begin{cases} \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0, \\ \alpha_i \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, l.\end{aligned}$$

On remarque qu'il est nécessaire d'ajouter la contrainte $\sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0$ pour s'assurer que $\sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j)$ correspond bien au minimum du Lagrangien. En effet, alors que la contrainte $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i$ est automatiquement satisfaite par la construction de la fonction, rien n'assure que $\sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0$ est elle aussi respectée.

La solution de ce problème d'optimisation sera bien sûr un vecteur $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_l^*)$, alors que c'est l'équation d'un hyperplan qu'il faut pour classer les données à l'aide de la fonction indicatrice

$$\text{Classe}(\mathbf{x}) = \text{signe}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b).$$

Il est toutefois possible de réécrire la fonction indicatrice ainsi, puisque $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i$:

$$\text{Classe}(\mathbf{x}) = \text{signe} \left(\sum_{i=1}^l (\alpha_i y_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}) + b \right).$$

Tout ce qu'il manque pour pouvoir utiliser cette fonction est la valeur de b . Or, comme l'hyperplan est canonique, et d'après les contraintes du problème primal, si une donnée \mathbf{x}_m se trouve sur la marge, alors on sait que

$$y_m (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_m + b) = 1.$$

Donc,

$$b = \frac{1}{y_m} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_m = y_m - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_m \quad \text{puisque } y_m \in \{-1, 1\}.$$

Ainsi, la résolution du problème dual permet de construire l'hyperplan canonique séparant les données avec la plus grande marge et de l'utiliser pour classer des données, tout comme la résolution du problème primal.

2.6. Vecteurs de support

Comme la fonction $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ est une fonction convexe continue et dérivable, que les contraintes $-(y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1) \leq 0$ sont des fonctions affines et que le domaine du problème est \mathbb{R}^n , la solution optimale trouvée respecte nécessairement les conditions de Karush-Kuhn-Tucker. En particulier, elle respecte la condition complémentaire de Karush-Kuhn-Tucker, c'est-à-dire que

$$\alpha_i^*(y_i(\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) - 1) = 0, \quad i = 1, \dots, l,$$

où $\boldsymbol{\alpha}^*$ représente la solution optimale du problème dual et (\mathbf{w}^*, b^*) représente celle du problème primal.

Cette condition implique que si $y_i(\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) - 1 \neq 0$, alors $\alpha_i = 0$. Par conséquent, les seuls cas où α_i peut ne pas être nul sont ceux où $y_i(\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) - 1 = 0$, c'est-à-dire ceux où

$$y_i(\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) = 1.$$

Or, les seuls points où $y_i(\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) = 1$ sont ceux qui sont sur la marge. Par conséquent, seuls les points sur la marge peuvent avoir des α_i non nuls. Ces points sont appelés les *vecteurs de support*.

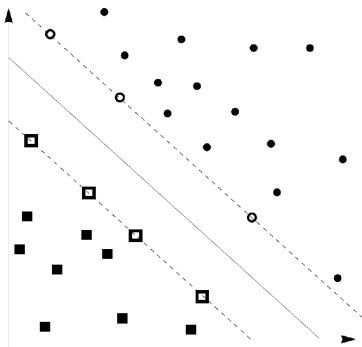


FIGURE 5. Les vecteurs de support

La raison de ce nom est que ce sont les seuls points utiles pour déterminer l'hyperplan. En effet, rappelons que le vecteur des coefficients de l'hyperplan est donné par

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \mathbf{x}_i.$$

Ainsi, tout point qui n'est pas sur la marge n'apporte aucune contribution, puisque α_i est alors nul. Si tous les points sauf les vecteurs de support étaient retirés de l'ensemble d'apprentissage, on retrouverait le même hyperplan.

Les vecteurs de support peuvent donc être vus comme les points contenant toute l'information essentielle du problème.

3. Machines à vecteurs de support pour données non linéairement séparables

3.1. Transformations

Jusqu'à présent, les machines à vecteurs de support permettent de trouver une règle pour classer les données lorsque celles-ci sont linéairement séparables. Cependant, il existe bien des cas pour lesquels il est impossible de séparer entièrement les données avec un hyperplan. Telles qu'elles ont été présentées jusqu'à présent, les SVM sont incapables de traiter un tel problème, puisqu'il est alors impossible que les contraintes

$$y_i(\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}_i + b^*) \geq 1$$

soient toutes respectées.

Afin de régler ce problème, il est possible d'appliquer une transformation aux données de sorte qu'une fois transformées, elles soient linéairement séparables. L'espace où se trouvent les données avant d'être transformées est appelé *l'espace d'entrée* (*input space*), alors qu'après avoir appliqué la transformation, les données se trouvent dans ce qu'on appelle *l'espace de redescription* (*feature space*). Il suffit alors de trouver l'hyperplan dans l'espace de redescription qui sépare le mieux ces données transformées. De retour dans l'espace d'entrée, le séparateur n'est pas linéaire.

$$\begin{aligned} \text{Soit } \Phi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^r \\ \mathbf{x} &\rightarrow \Phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

la transformation appliquée aux données pour les rendre linéairement séparables, avec r la dimension de l'espace de redescription. Très souvent, $r > n$, ce qui signifie que la transformation amène les données dans un espace de dimension supérieure afin de mieux pouvoir les séparer.

Pour trouver le séparateur, on procède de la même manière que précédemment, mais en substituant $\Phi(\mathbf{x}_i)$ à \mathbf{x}_i ($i = 1, \dots, l$). Il s'agit donc de résoudre le problème suivant :

$$\text{minimiser } \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \text{ sujet à } y_i(\mathbf{w} \cdot \Phi(\mathbf{x}_i) + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, l.$$

Le dual de ce problème est

$$\begin{aligned} \text{maximiser } & \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \Phi(\mathbf{x}_i) \cdot \Phi(\mathbf{x}_j)) \\ \text{sujet à } & \begin{cases} \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0, \\ \alpha_i \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

La fonction indicatrice associée à ce problème dual est par conséquent

$$\begin{aligned} \text{Classe}(\mathbf{x}) &= \text{signe} \left(\sum_{i=1}^l (\alpha_i y_i \Phi(\mathbf{x}_i) \cdot \Phi(\mathbf{x})) + b \right), \\ \text{où } b &= y_m - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \Phi(\mathbf{x}_i) \cdot \Phi(\mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

avec $\Phi(\mathbf{x}_m)$ une donnée sur la marge de l'hyperplan dans l'espace de redescription.

Si la transformation utilisée est appropriée, la résolution d'un de ces problèmes (le primal ou le dual) permet de trouver un séparateur non linéaire avec la marge la plus grande possible, permettant ainsi d'utiliser les machines à vecteurs de support dans le cas où les données ne peuvent pas être séparées linéairement.

3.2. Les noyaux

Toutefois, l'utilisation des transformations pose certains problèmes. En effet, outre le fait qu'il faille choisir une bonne transformation, il faut l'appliquer à toutes les données, puis effectuer les calculs avec ces données transformées, c'est-à-dire dans l'espace de redescription. Or, comme la dimension de cet espace est bien souvent beaucoup plus grande que celle de l'espace d'entrée, les calculs requis peuvent devenir extrêmement longs à effectuer.

C'est ici que la formulation duale du problème d'optimisation prend toute son importance. En effet, on remarque que lorsque le problème est sous sa forme duale, les données de l'ensemble d'apprentissage n'apparaissent que dans un produit scalaire avec d'autres données du même ensemble. Il en est de même dans la fonction indicatrice duale. Ceci amène à définir comme suit une fonction appelée *noyau* (*kernel*) :

$$\begin{aligned} K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &\rightarrow \Phi(\mathbf{x}_i) \cdot \Phi(\mathbf{x}_j). \end{aligned}$$

Cette fonction prend en entrée deux points dans l'espace d'entrée et calcule leur produit scalaire dans l'espace de redescription. L'avantage d'une telle fonction est qu'il n'est pas nécessaire d'appliquer une transformation aux données afin de calculer leur produit scalaire dans l'espace de redescription. Ce calcul peut se faire directement à partir des données de l'espace d'entrée.

Grâce au concept de noyau, il est possible de réécrire le problème dual de cette manière :

$$\begin{aligned} &\text{maximiser } \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)) \\ &\text{sujet à } \begin{cases} \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0, \\ \alpha_i \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned}$$

La fonction indicatrice peut elle aussi être réécrite :

$$\begin{aligned} \text{Classe}(\mathbf{x}) &= \text{signe} \left(\sum_{i=1}^l (\alpha_i y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})) + b \right), \\ \text{où } b &= y_m - \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

avec \mathbf{x}_m un vecteur de support.

On remarque que de cette manière, lorsque la fonction noyau est connue, la transformation $\Phi(\mathbf{x})$ n'apparaît nulle part, ni dans le problème, ni dans l'application de la solution. Par conséquent, grâce à la fonction noyau, il n'est pas nécessaire d'effectuer la transformation sur les données. Cette fonction permet

donc de faire tous les calculs nécessaires sans avoir à se préoccuper de la dimension de l'espace de redescription.

3.3. Noyaux : Construction et exemples

Il est bien de savoir qu'un noyau est tout ce qui est nécessaire pour utiliser les SVM dans le cas non linéaire, mais cette information est inutile sans la connaissance des noyaux qu'il est possible d'utiliser. Nous présentons maintenant les manières de construire des noyaux, ainsi que les noyaux les plus fréquemment utilisés pour les machines à vecteurs de support.

La première méthode pour construire un noyau est de choisir une transformation, de calculer le produit scalaire de deux éléments quelconques transformés, puis d'en faire une fonction. Cette méthode permet de déterminer le noyau d'une transformation bien spécifique, mais peut s'avérer difficile à utiliser, surtout lorsque le nombre de dimensions augmente. Une autre méthode consiste à utiliser le théorème de Mercer. D'après ce théorème, une fonction est un noyau si et seulement si elle est symétrique et semi-définie positive (voir [2] pour plus de détails). Ainsi, au lieu de choisir une transformation puis de calculer son noyau, on choisit plutôt une fonction symétrique et semi-définie positive, ce qui nous assure qu'elle correspond au produit scalaire d'une quelconque transformation. La transformation elle-même est généralement inconnue pour les noyaux construits de cette façon.

Le théorème de Mercer permet aussi de construire des noyaux à partir de noyaux déjà connus. En effet, si K_1 et K_2 sont des noyaux, alors les fonctions suivantes sont aussi des noyaux :

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= K_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + K_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j); \\ K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= aK_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad a \in \mathbb{R}; \\ K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= K_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)K_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j). \end{aligned}$$

Les noyaux présentés dans la figure 6 sont les plus fréquemment utilisés. Le choix du noyau a un impact majeur sur la performance des SVM. Quelques méthodes ont été suggérées pour sélectionner un bon noyau, mais il s'agit encore d'un sujet de recherche actif. En général, le noyau gaussien est souvent préféré, puisqu'il donne de bonnes performances dans toutes sortes de contextes.

Nom	Noyau
Linéaire	$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j)$
Polynomial de degré d	$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + 1)^d$
Gaussien	$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = e^{-\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{2\sigma^2}}$
Multiquadratique inverse	$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \beta}}$

FIGURE 6. Les noyaux les plus fréquemment utilisés

4. Marges souples

4.1. Machines à vecteurs de support et bruit

En pratique, les données sont rarement parfaites. Il y a souvent du « bruit », c'est-à-dire des données qui sont mal classées par un modèle qui est toutefois excellent en général. Il s'agit donc d'erreurs qui sont inévitables, même pour les meilleurs modèles. Toutefois, les machines à vecteurs de support ne permettent pas de tenir compte de ce phénomène, puisque dans les contraintes, toutes les données doivent être correctement classées. Supposons par exemple qu'un ensemble de données serait très bien séparé par un hyperplan, mais qu'il n'est pas linéairement séparable dû à la présence d'un certain bruit dans les données. Dans un tel cas, il serait impossible de construire une SVM linéaire, car il est impossible que toutes les contraintes soient respectées.

Afin de contourner ce problème, il peut être tentant d'utiliser un noyau quelconque afin de rendre les données linéairement séparables. Ceci est en effet toujours possible en utilisant un noyau polynomial avec un degré suffisamment élevé. Toutefois, bien que les données de l'ensemble d'apprentissage seront parfaitement séparées, la règle trouvée risque de très mal se généraliser, puisqu'elle va tenir compte de toutes les petites variations et ainsi généraliser des phénomènes qui sont en réalité bien spécifiques à l'ensemble de données actuel.

4.2. Marge souple

Un meilleur moyen serait de permettre à quelques données d'être à l'intérieur de la marge ou du mauvais côté de l'hyperplan. Il s'agit du concept de *marge souple* (*soft margin*). Une première idée serait de tenter de maximiser la marge tout en minimisant le nombre de données mal classées. Toutefois, le nombre de données mal classées peut être trompeur, puisqu'il ne permet pas de déterminer si une donnée était presque correctement classée ou si elle était en réalité très loin de l'hyperplan.

Une meilleure idée est d'attribuer à chaque donnée \mathbf{x}_i une valeur ξ_i qui représente à quel point la donnée est éloignée d'un bon classement, puis de tenter de minimiser la somme des ξ_i . Plus formellement, au lieu d'imposer

$$y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, l$$

ce qui oblige les données à être bien classées, les contraintes seront plutôt

$$y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, \quad i = 1, \dots, l \quad \text{avec } \xi_i \geq 0.$$

Par conséquent, il est possible pour une donnée d'être du mauvais côté de la marge, si ξ_i est non nul. On dira d'une donnée qu'elle est du mauvais côté de la marge si elle est mal classée ou si sa distance par rapport à l'hyperplan séparateur est plus petite que la marge (remarquons que les points pour lesquels $\xi_i \neq 0$ ne sont pas considérés dans le calcul de la marge). L'objectif est ainsi de maximiser la marge tout en minimisant la somme des ξ_i . Le problème d'optimisation devient alors

$$\text{minimiser } \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^l \xi_i \quad \text{sujet à} \quad \begin{cases} y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i & i = 1, \dots, l, \\ \xi_i \geq 0 \end{cases}$$

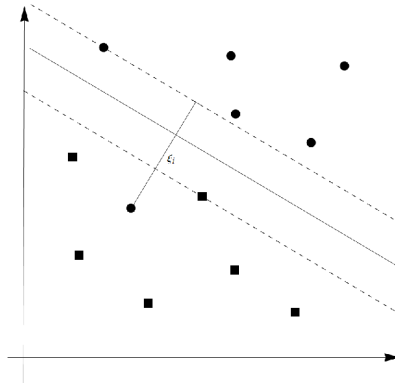


FIGURE 7. Marge souple

où $C > 0$ est une constante qui représente la pénalité d'avoir des données mal classées. Lorsque C est très élevée, il y aura très peu de données mal classées, alors qu'il y en aura plus pour une valeur plus faible de cette constante. Le choix de C a une grande influence sur le modèle. En pratique, plusieurs modèles sont souvent construits, avec différentes valeurs de C , puis le meilleur est choisi.

4.3. Représentation duale

Il est possible de construire le dual de ce problème de la même manière que précédemment. Le Lagrangien est

$$L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^l \xi_i - \sum_{i=1}^l \alpha_i (y_i (\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1 + \xi_i) - \sum_{i=1}^l r_i \xi_i.$$

Afin de trouver le Lagrangien minimal pour un $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})$ donné, il faut le dériver par rapport aux variables primales. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{w}} &= \mathbf{w} - \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i \mathbf{x}_i = 0; \\ \frac{\partial L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r})}{\partial b} &= - \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i = 0; \\ \frac{\partial L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, r)}{\partial \xi_i} &= C - \alpha_i - r_i = 0. \end{aligned}$$

De ceci, on obtient

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^l y_i \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad C = \alpha_i + r_i \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, l\}.$$

Utilisons ces expressions pour réécrire le Lagrangien uniquement en fonction des variables duales :

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^l \xi_i - \sum_{i=1}^l \alpha_i (y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1 + \xi_i) - \sum_{i=1}^l r_i \xi_i \\
&= \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j).
\end{aligned}$$

Il s'agit de la fonction objectif du problème dual pour la marge souple. On remarque que cette fonction est exactement la même que celle obtenue précédemment. La différence se situe au niveau des contraintes.

En effet, rappelons que dans le problème dual, les multiplicateurs de Lagrange qui sont associés à des contraintes d'inégalités doivent être supérieurs ou égaux à zéro (voir la sous-section 1.3). Par conséquent, $\alpha_i \geq 0$ et $r_i \geq 0$. Toutefois, r_i n'apparaît pas dans le problème dual, mais on sait que $C - \alpha_i - r_i = 0$. La contrainte $r_i \geq 0$ s'écrit donc aussi $C - \alpha_i \geq 0$. Ceci implique que $\alpha_i \leq C$.

Le problème dual est ainsi

$$\begin{aligned}
&\text{maximiser } \sum_{i=1}^l \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\alpha_i \alpha_j y_i y_j \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \\
&\text{sujet à } \begin{cases} \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i = 0, \\ 0 \leq \alpha_i \leq C \end{cases} \quad i = 1, \dots, l.
\end{aligned}$$

4.4. Remarques

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker tiennent toujours dans le cas de la marge souple. Par conséquent, d'après la condition complémentaire, pour la solution optimale, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
\alpha_i (y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1 + \xi_i) &= 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, l; \\
r_i \xi_i &= (C - \alpha_i) \xi_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, l.
\end{aligned}$$

Ceci implique que si $\xi_i \neq 0$, alors $C - \alpha_i = 0$ (puisque $(C - \alpha_i) \xi_i = 0$), et donc $\alpha_i = C$. De plus, si un point est tel que $\xi_i \neq 0$, alors il est du mauvais côté de la marge, ce qui découle directement du rôle de ξ_i dans le problème d'optimisation. À l'opposé, tous les points pour lesquels $\xi_i = 0$ sont du bon côté de la marge, et ainsi nécessairement bien classés.

D'autre part, si, pour une certaine donnée, on a $0 < \alpha_i < C$, alors celle-ci est exactement sur la marge. En effet, on a alors $0 < \alpha_i < C$, $\alpha_i \neq C$, et donc il faut que $\xi_i = 0$ pour que $(C - \alpha_i) \xi_i = 0$. De plus, $\alpha_i \neq 0$, ce qui implique que $y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1 + \xi_i = 0$ afin de respecter l'égalité $\alpha_i (y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1 + \xi_i) = 0$. Comme $\xi_i = 0$, il s'ensuit que

$$y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) = 1$$

et donc que \mathbf{x}_i est directement sur la marge.

Enfin, les points pour lesquels $\xi_i = 0$ et $y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \neq 1$ ont un α_i nul, afin de respecter l'égalité $\alpha_i (y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1 + \xi_i) = 0$.

Les points directement sur la marge sont appelés *vecteurs de support libres* (*free support vectors*), ou encore *vecteurs de support non-bornés* (*unbounded support vectors*). Les points pour lesquels $\alpha_i = C$ sont quant à eux appelés *vecteurs*

de support bornés (*bounded support vectors*). Ici encore, les vecteurs de support sont les seuls point qui sont vraiment important pour déterminer l'hyperplan optimal, puisque ce sont les seuls points pour lesquels $\alpha_i \neq 0$.

Enfin, remarquons que bien que la marge souple ait été présentée pour le cas linéaire, il est possible de l'utiliser aussi dans le cas non linéaire exactement de la même manière, puisque la fonction objectif du dual est parfaitement identique à celle de la marge non souple. Il suffit donc encore de remplacer tous les produits scalaires par une fonction noyau.

Références

- [1] Berliaire, M. : *Introduction à l'optimisation différentiable*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006, 532 p.
- [2] Christianini, N. et Shawe-Taylor, J. : *An Introduction to Support Vector Machines and other kernel based learning methods*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, 189 p.
- [3] Orchard, B., Yang, C. et Ali, M. : *Innovation in Applied Artificial Intelligence : 17th International Conference on Industrial and Engineering Applications of Artificial Intelligence and Expert Systems*, Springer, New York, 2004, 1272 p.
- [4] Perner, P. : *Machine Learning and Data Mining in Pattern Recognition : 5th International Conference*, Springer, New York, 2007, 913 p.
- [5] Vapnik, V.N. : *The Nature of Statistical Learning Theory*, Springer, New York, 1995, 188 p.
- [6] Wang, L. : *Support Vector Machines : Theory and Applications*, Springer, New York, 2005, 431 p.

DOMINIK FRANCOEUR, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: dominik.francoeur@usherbrooke.ca

TRIANGULATION MINIMALE DE CUBES

JEAN-PHILIPPE BURELLE

RÉSUMÉ. Une manière combinatoire d'étudier les triangulations de cubes n -dimensionnels est donnée, ainsi que des outils pour optimiser le nombre de simplexes utilisés dans une telle triangulation. On donne ensuite un exemple concret en démontrant la minimalité d'une triangulation du 3-cube.

0. Introduction

Les triangulations, en plus d'avoir un intérêt intrinsèque, sont utiles dans plusieurs domaines. Entre autres, elles sont utilisées pour discrétiser des problèmes complexes lorsqu'il n'y a pas de solutions dans le cas continu. Par exemple, on utilise des triangulations pour approximer des surfaces en imagerie numérique. Les triangulations de cubes de dimensions supérieures peuvent être utilisées dans des algorithmes qui servent à trouver des points fixes d'applications, et plus la triangulation est petite, plus l'algorithme sera rapide, d'où l'intérêt de trouver des triangulations minimales [2].

Puisque étudier les triangulations du cube en considérant ses propriétés géométriques devient vite compliqué en dimensions supérieures à trois, on règle le problème en considérant le cube comme un objet combinatoire et en définissant les triangulations de manière complètement combinatoire. Cette définition est extraite de plusieurs travaux sur les triangulations mais entre autres [3]. Un d -cube sera donc représenté par l'ensemble de ses sommets, arêtes et faces. Il peut aussi être vu comme l'enveloppe convexe de ses sommets $\text{conv}(\{0, 1\}^d)$.

On parle de définitions d'abord pour avoir un langage dans lequel parler de triangulations, puis d'une technique pour passer d'une triangulation à une autre facilement, et finalement d'une application de cette technique pour trouver une triangulation minimale du cube en trois dimensions.

1. Préliminaire

Une triangulation en deux dimensions est la séparation d'une figure en triangles. Si l'on veut généraliser le concept aux dimensions supérieures, nous devons d'abord généraliser l'idée de triangle et de tétraèdre.

Définition : L'*enveloppe convexe* d'un ensemble de points P , notée $\text{conv}(P)$, est le plus petit ensemble convexe contenant P (Fig. 1).

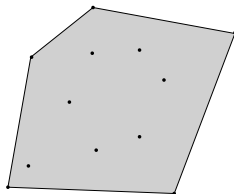


FIGURE 1. L'enveloppe convexe d'un ensemble de points

Définition : Un ensemble de points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est dit *affinement indépendant* si son enveloppe convexe est $(n - 1)$ -dimensionnelle.

Définition : Un n -*simplexe* est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points affinement indépendants dans un espace euclidien de dimension n ou plus.

Par exemple, l'enveloppe convexe de trois points affinement indépendants est un triangle, et celle de quatre points qui ne sont pas dans le même plan est un tétraèdre. La définition suivante est une version combinatoire de la définition usuelle d'une face de polytope.

Définition : Une *face* n -dimensionnelle d'un ensemble de points P est un sous-ensemble de P qui optimise une équation linéaire.

Nous avons maintenant réuni toutes les définitions nécessaires pour définir une triangulation d'un ensemble de points.

Définition : Une *triangulation* d'un ensemble fini de points P est une collection de simplexes S qui respecte les deux propriétés suivantes :

- (1) $\bigcup_{\sigma_i \in S} \sigma_i = \text{conv}(P)$.
(L'union de tous des simplexes doit être le polytope complet.)
- (2) L'intersection de deux simplexes doit être une face des deux ou l'ensemble vide.

2. Flips

Un outil très pratique pour construire des petites triangulations est l'opération de *flip*. Intuitivement, un flip correspond à un mouvement minimal entre deux triangulations. En deux dimensions, il s'agit la plupart du temps de prendre un quadrilatère et de changer la diagonale le séparant en deux pour l'autre (Fig. 2).

En dimensions supérieures par contre, il existe une généralisation de cette notion, et plus on augmente de dimension, plus les flips sont variés et peuvent changer le nombre de simplexes dans une triangulation.

La définition de flip la plus pratique pour identifier les flips possibles dans un polytope, donnée dans [5] mais originalement formulée par Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky [4], est celle qui utilise les *circuits*.

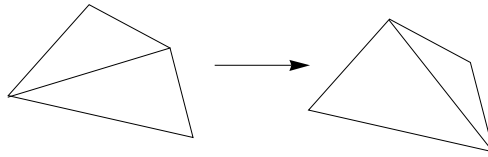


FIGURE 2. Un exemple de flip en 2 dimensions

Définition : Un *circuit* C est un sous-ensemble affinement dépendant *minimal* d'un ensemble de points P , c'est à dire que tous ses sous-ensembles propres sont affinement indépendants.

Par exemple, trois points sur une droite ou cinq points dans l'espace tridimensionnel forment des circuits.

Proposition : Il existe une équation de dépendance unique (à une constante près) pour un circuit $C = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, satisfaisant les relations suivantes :

$$(1) \quad \begin{aligned} \sum \lambda_i x_i &= 0 \\ \sum \lambda_i &= 0. \end{aligned}$$

PREUVE. *Supposons au contraire qu'il en existe deux, alors*

$$\sum \lambda_i x_i = 0 \quad \sum \mu_i x_i = 0.$$

Nous savons que les λ_i et μ_i sont tous non-nuls, car sinon il existerait un circuit plus petit. Ceci implique

$$\begin{aligned} \sum_{i>1} \lambda_i x_i &= -\lambda_1 x_1 & \sum_{i>1} \mu_i x_i &= -\mu_1 x_1 \\ \sum_{i>1} \frac{\lambda_i x_i}{\lambda_1} &= -x_1 & \sum_{i>1} \frac{\mu_i x_i}{\mu_1} &= -x_1. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{i>1} \frac{\lambda_i x_i}{\lambda_1} = \sum_{i>1} \frac{\mu_i x_i}{\mu_1}.$$

Donc

$$\sum_{i>1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} - \frac{\mu_i}{\mu_1} \right) x_i = 0.$$

Ceci est une contradiction à la minimalité des deux circuits car nous avons trouvé un ensemble dépendant plus petit que les deux précédents (il n'utilise pas le point x_1).

La propriété de Radon sur les circuits [5] permet de diviser le circuit en deux triangulations différentes. Cette propriété dit que la subdivision suivante du circuit en deux ensembles est la seule telle que l'intersection des enveloppes convexes est non-vide. (Fig. 3) Les λ_i sont ceux de l'équation (1).

$$C_+ = \{x_i \in C \mid \lambda_i < 0\}$$

$$C_- = \{x_i \in C \mid \lambda_i > 0\}.$$

L'intersection des enveloppes est au point

$$\sum_{x_i \in C_+} \lambda_i x_i = \sum_{x_i \in C_-} -\lambda_i x_i.$$

Pour que cette relation soit une combinaison convexe, on doit normaliser les coefficients λ_i de sorte que $\sum_{x_i \in C_+} \lambda_i = \sum_{x_i \in C_-} -\lambda_i = 1$, mais ceci est faisable en divisant par une constante.

L'égalité est facile à voir en regardant l'équation (1).

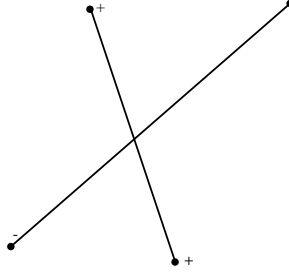


FIGURE 3. La propriété de Radon

Puisque cette subdivision est la seule telle que l'intersection des enveloppes convexes est non-vide, si l'on choisit un des deux ensembles de la subdivision, disons C_+ , et que l'on s'assure de ne jamais prendre tous les points de C_+ dans un des simplexes d'une triangulation donnée, on aura bel et bien une triangulation puisqu'on n'aura pas le point où les enveloppes convexes de C_+ et de C_- s'intersectent.

On peut donc subdiviser le circuit en deux triangulations données par :

$$T_- = \{C \setminus x_i \mid \lambda_i < 0\}.$$

$$T_+ = \{C \setminus x_i \mid \lambda_i > 0\}.$$

C'est-à-dire que pour la première triangulation, on enlève un à un les points qui ont un coefficient négatif et on prend les simplexes résultants, et pour la deuxième on fait la même chose avec les points qui ont un coefficient positif. On obtient donc la définition suivante pour un flip :

Définition : Soit \mathcal{T}_1 une triangulation d'un ensemble de points A , supposons que $T_+ \subseteq \mathcal{T}_1$ où T_+ est la triangulation associée au circuit $C \subseteq A$ décrite plus haut. On dit que \mathcal{T}_2 est obtenue de \mathcal{T}_1 par un *flip* si :

$$\mathcal{T}_2 = (\mathcal{T}_1 \setminus \{\sigma_i \in T_+\}) \cup \{\sigma_i \in T_-\}$$

3. Applications des flips

Dans le 3-cube, il existe quatre classes d'isométrie de simplexes (Fig. 4) [1].

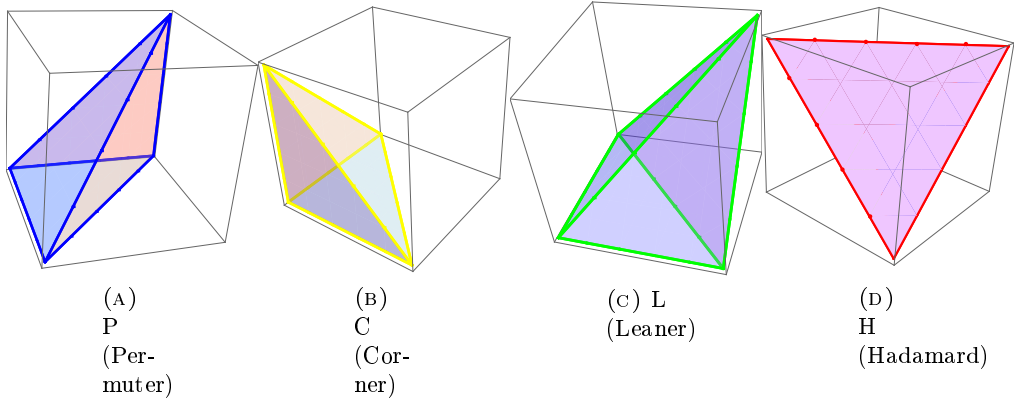


FIGURE 4. Classes d'isométrie des simplexes du 3-cube

Il existe deux flips possibles parmi ces classes. (Fig. 5 et 6)

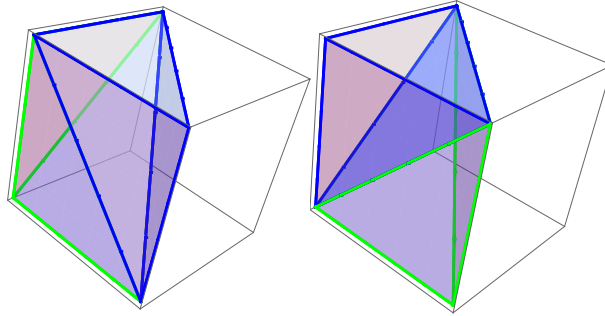


FIGURE 5. Deux permuters deviennent un corner et un leaner :
 $2P = L + C$

En les utilisant on réussit à diminuer la taille de la triangulation triviale (six simplexes de classe P) à cinq simplexes. Voici comment on procède, en notant de manière additive les flips entre les simplexes :

$$\begin{aligned}
 6P &= 3C + 3L \\
 &= 3C + H + C \\
 &= 4C + H.
 \end{aligned}$$

Théorème : Le nombre minimal de simplexes dans une triangulation du 3-cube est 5.

PREUVE. Pour calculer le d -volume d'un simplexe, on utilise la formule

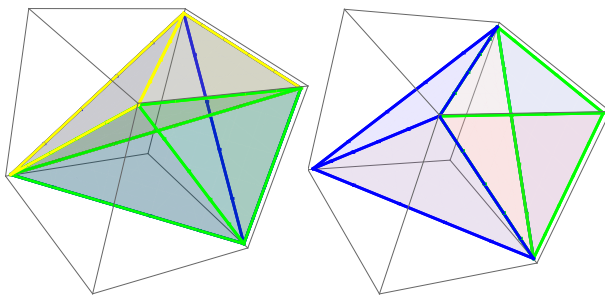


FIGURE 6. Trois leaners deviennent un corner et un hadamard :
 $3L = C + H$

$$\text{vol}(\sigma) = \frac{|\det(1|A)|}{d!}.$$

où A est la matrice dont les lignes sont les coordonnées des sommets du simplexe. La notation $(1|A)$ signifie qu'on augmente la matrice d'une colonne de 1 et d est la dimension du simplexe. En dimension trois, les Leaners, Corners et Permuters ont tous un volume de $1/6$. Les Hadamards ont un volume de $1/3$. Il est évident que pour recouvrir le cube, il faut que la somme des volumes des simplexes soit égale au volume du cube, c'est à dire, à 1. Il faut également que chacune des arêtes du cube soit recouverte par une arête de simplexe. Comme les Hadamards ne recouvrent aucune arête du cube, et que les simplexes de volume $1/6$ recouvrent au maximum 3 arêtes chacun, il faut au moins 4 simplexes de volume $1/6$ pour recouvrir les 12 arêtes du cube. Cela fait un volume total de $2/3$ avec 4 simplexes, et pour finir de recouvrir le volume total on doit utiliser un Hadamard de volume $1/3$. C'est pourquoi on ne peut faire une triangulation utilisant moins de 5 simplexes pour le 3-cube.

En dimensions quatre et cinq, il existe également une série de flips qui mènent à la triangulation minimale à partir de la triangulation en $d!$ simplexes. [1]

Références

- [1] Adam Bliss. Covering numbers of the cubes, 2003.
- [2] Adam Bliss and Francis Edward Su. Lower bounds for simplicial covers and triangulations of cubes. *Discrete Comput. Geom.*, 33(4) :669–686, 2005.
- [3] Jesus A. De Loera, Jörg Rambeau, and Francisco L. Santos. Triangulations : Structures and algorithms (à paraître).
- [4] I.M. Gel'fand, M.M. Kapranov, and A.V. Zelevinsky. Discriminants, resultants and multi-dimensional determinants. 1994.
- [5] Francisco Santos. Geometric bistellar flips. the setting, the context and a construction, 2006.

JEAN-PHILIPPE BURELLE, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: jean-philippe.burelle@usherbrooke.ca

LA VISUALISATION DE LA SPHÈRE DE DIMENSION TROIS

ROSEMONDE LAREAU-DUSSAULT

RÉSUMÉ. Le but de cet article est de décrire la sphère de dimension trois et de donner différentes façons de la visualiser. En particulier, on présentera sa projection stéréographique.

1. Introduction

Nos sens nous permettent de facilement percevoir et imaginer des objets de trois dimensions et moins. Par contre, en géométrie, on peut travailler avec des objets et des espaces de plus de trois dimensions.

Dans le cadre de cet article, je vais introduire la sphère de dimension trois, définie dans \mathbb{R}^4 .

Tout d’abord, je vais proposer des définitions de la sphère de dimension trois. Ensuite, je vais donner des façons de la concevoir. Finalement, je vais expliciter une projection stéréographique qui nous donnera une bijection de cette sphère vers \mathbb{R}^3 .

2. Définitions

En général, une sphère de dimension n est, dans un espace de $n + 1$ dimensions, l’ensemble des points situés à une distance constante (le rayon) d’un point (le centre). Une sphère de dimension n est dite unitaire, et se note S^n , si elle est centrée à l’origine et qu’elle a un rayon de une unité. En particulier, la sphère de dimension un, S , est communément appelée un « cercle » et la sphère de dimension deux, S^2 , « sphère ». Ce sont les sphères les plus connues étant donné que l’on perçoit facilement trois dimensions spatiales.

Le cercle est la sphère de dimension un, bien que l’on nécessite deux dimensions pour apprécier l’ensemble de ses propriétés. Cela est dû au fait qu’un cercle peut être exprimé à l’aide d’une seule variable, par exemple, en utilisant

Je tiens à remercier le CRSNG ainsi que Virginie Charette pour leur appui financier. J’aimerais aussi remercier Virginie Charette pour son soutien et sa disponibilité.

les coordonnées polaires $S = \{(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. De même, la sphère de dimension deux ne nécessite que deux variables pour être décrite.

La *sphère de dimension trois* est donc, dans un espace à quatre dimensions, l'ensemble des points situés à une distance constante d'un centre que l'on notera :

$$\mathcal{S}^3 = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = 1 \right\}.$$

En utilisant des coordonnées *hypersphériques*, on peut décrire \mathcal{S}^3 avec trois variables, comme suit :

$$\mathcal{S}^3 = \{(\cos \varphi, \cos \phi \sin \theta \sin \varphi, \sin \phi \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi)\}$$

où $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$.

3. Description de \mathcal{S}^3

Pour que le lecteur puisse se faire une image mentale de \mathcal{S}^3 , je vais utiliser une analogie présentée dans le livre Flatland [1]. Nous allons étudier les sphères de dimensions inférieures, pour ensuite donner une façon de concevoir la sphère de dimension trois.

3.1. La sphère de dimension un, vue de \mathbb{R}

Supposons que vous vivez dans un monde unidimensionnel, c'est-à-dire dans un monde n'ayant besoin que d'une variable pour être décrit. Par exemple, vous pourriez être un point sur la droite réelle. Il serait alors difficile pour vous, point, de visualiser un cercle, étant donné que le cercle est contenu dans \mathbb{R}^2 (voir figure 1).

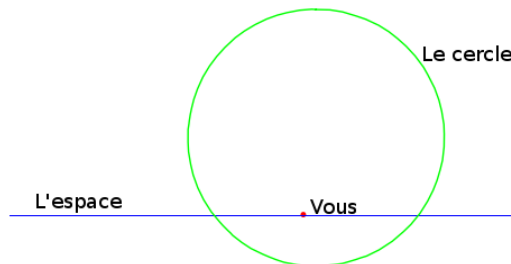


FIGURE 1. Exemple en une dimension

Dans ce contexte, vous ne pourriez voir que deux points du cercle à la fois. Lorsque le cercle est tangent à votre droite-espace, vous n'en voyez qu'un point et ce point disparaît selon votre point de vue lorsque le cercle s'éloigne de votre droite-espace.

3.2. La sphère de dimension deux, vue de \mathbb{R}^2

Pour poursuivre l'analogie avec la sphère de dimension deux, il faut se mettre dans la peau d'un objet de dimension deux vivant, par exemple, dans un plan. Il est alors impossible pour vous de visualiser \mathcal{S}^2 au complet étant donné que \mathcal{S}^2 est contenue dans \mathbb{R}^3 .

Supposons qu'une sphère de dimension deux traverse un plan. On verra d'abord un point apparaître, puis un cercle qui grossira jusqu'à atteindre le rayon de la sphère, puis qui rétrécit. Ainsi, vous ne pouvez voir qu'une tranche de la sphère à la fois, soit un cercle. Le rayon du cercle est plus ou moins grand selon la distance entre le centre de la sphère et le plan dans lequel vous êtes. Le rayon est maximal lorsque le plan le tranche à l'équateur. À l'extrême, vous ne voyez qu'un point, et ce point disparaîtra si le centre de la sphère est plus loin du plan que le rayon de la sphère (voir figure 2).

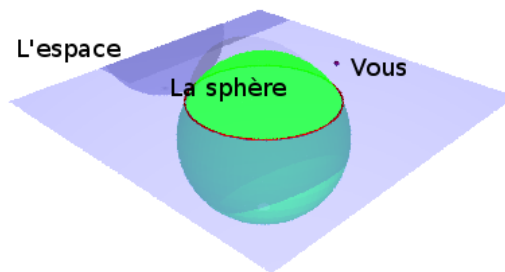


FIGURE 2. Exemple en deux dimensions

3.3. La sphère de dimension trois, vue de \mathbb{R}^3

Supposons maintenant qu'une sphère de dimension trois « traverse » l'espace. On verra d'abord un point, puis une sphère grossir jusqu'à atteindre le rayon de la sphère de dimension trois, puis se contracter jusqu'à redevenir un point, puis disparaître (voir figure 3).

Vous pouvez donc voir des « tranches » de \mathcal{S}^3 , c'est-à-dire des sphères de dimension deux. Plus le centre de la sphère de dimension trois que vous observez est proche de l'espace dans lequel vous vous trouvez, plus la sphère de dimension deux que vous voyez est grosse. Si le centre de \mathcal{S}^3 est à une distance égale à son

rayon de votre espace, cette sphère vous semble un point, mais si elle est plus loin que son rayon, vous ne la voyez pas.



FIGURE 3. \mathcal{S}^3 traverse \mathbb{R}^3

3.4. \mathcal{S}^3 comme réunion de deux boules

Une autre façon d'imaginer \mathcal{S}^3 est de coller deux « boules » par leurs frontières. D'abord, notons que l'on peut représenter la sphère de dimension deux comme étant deux disques collés l'un à l'autre le long de leurs frontières. Pour ce faire, on prend deux disques dans \mathbb{R}^3 . Supposons-les dans le plan x, y . On « pousse » l'intérieur de ces disques le long de l'axe des z , un dans le sens croissant (voir figure 4), et l'autre décroissant. En superposant les frontières de ces disques, on obtient \mathcal{S}^2 .

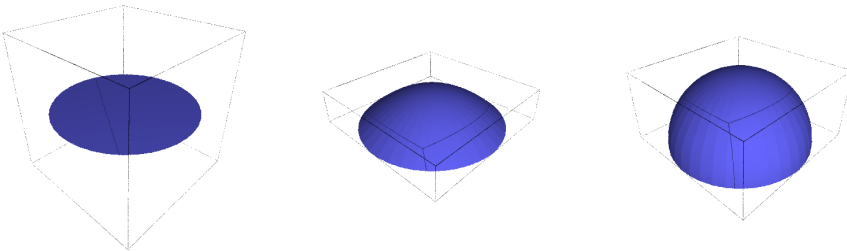


FIGURE 4. Un disque « poussé » dans le sens croissant de l'axe des z

On peut de la même façon décrire \mathcal{S}^3 comme étant deux boules collées l'une à l'autre le long de leurs frontières. Pour ce faire, on prend deux boules dans \mathbb{R}^4 . Supposons-les dans l'espace x, y, z . On « pousse » l'intérieur de ces boules le long de l'axe des w , un dans le sens croissant, et l'autre décroissant. En superposant les frontières de ces boules, on obtient \mathcal{S}^3 .

4. Projection stéréographique

Une projection stéréographique de \mathcal{S}^n est une fonction de \mathcal{S}^n , auquel on soustrait un point, vers \mathbb{R}^n . Généralement, on soustrait un des pôles de \mathcal{S}^n . Dans le cadre de cet article, nous soustrairons le pôle sud, *PS*.

Nous allons encore une fois commencer par définir et illustrer une projection stéréographique dans les deux cas qui nous sont les plus intuitifs, soit pour \mathcal{S} et \mathcal{S}^2 . Ensuite, il nous sera possible d'expliciter une projection stéréographique de \mathcal{S}^3 vers \mathbb{R}^3 .

4.1. Projection stéréographique de \mathcal{S}

Dans le cas d'un cercle, une projection stéréographique est une fonction qui envoie $\mathcal{S} \setminus PS$ vers \mathbb{R} . Pour cette fonction, on définit un point particulier du cercle, par exemple, le pôle sud $PS = (0, -1)$, et une droite particulière du plan, par exemple, la droite $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$ qui sera l'image de la fonction. Ensuite, pour trouver l'image d'un point quelconque du cercle $P = (x, y)$, on trace l'unique droite D' passant par P et par PS . La projection de P est l'intersection de D et de D' , notée P' (voir figure 5).

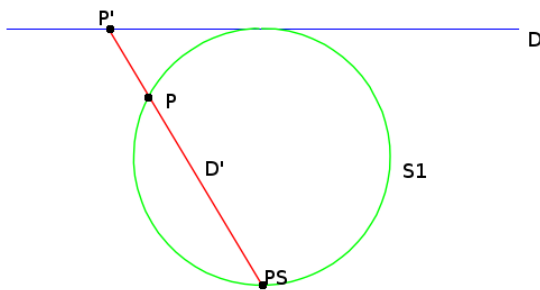


FIGURE 5. La projection stéréographique de \mathcal{S}

Dans le cas particulier que nous venons de décrire, la projection stéréographique est représentée par la fonction $f : \mathcal{S} \setminus PS \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{x}{y + 1}$.

On aurait pu appliquer le même principe avec n'importe quel point du cercle au lieu de PS et n'importe quelle droite de \mathbb{R}^2 au lieu de D .

Une façon de voir cette projection est de « dérouler » le cercle le long de \mathbb{R} .

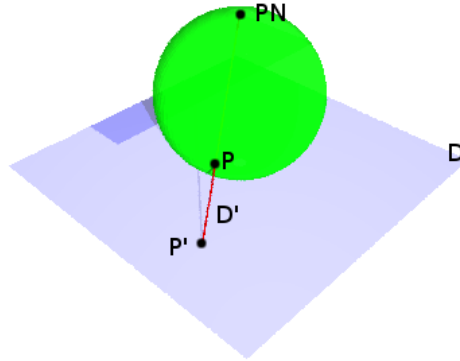
4.2. Projection stéréographique de \mathcal{S}^2

Pour ce qui est de la projection stéréographique de \mathcal{S}^2 , on se fixe un point de projection, par exemple le pôle nord $PN = (0, 0, 1)$ et un plan de projection, par exemple $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -1\}$. Ensuite, on trace une droite en suivant le même principe que pour la projection de \mathcal{S} et on trouve que l'image du point P est $P' \in D$ (voir figure 6).

On peut encore imaginer que l'on « déroule » la sphère sur le plan.

Une différence majeure est qu'on utilise un plan de projection au lieu d'une droite de projection. En général, on projette \mathcal{S}^n dans \mathbb{R}^n .

La projection du pôle sud vers $(x, y, 1)$ peut être donnée explicitement par la formule $f : \mathcal{S}^2 \setminus PN \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 + z}, \frac{y}{1 + z} \right)$.

FIGURE 6. La projection stéréographique de \mathcal{S}^2

4.3. Projection stéréographique de \mathcal{S}^3

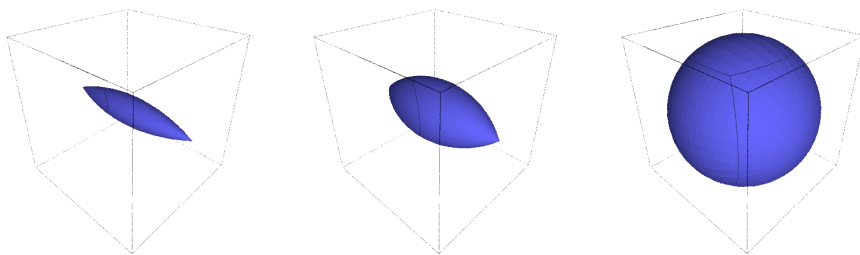
On arrive donc à ce qui nous intéresse le plus, soit la projection stéréographique de \mathcal{S}^3 . On utilise le même procédé que pour \mathcal{S} et \mathcal{S}^2 , c'est-à-dire, on définit un point de projection, par exemple, $PS = (0, 0, 0, -1)$ et un espace de dimension trois de projection, par exemple, $(x, y, z, 1)$. Ensuite, on trace une droite passant par notre point de projection et par le point que l'on veut projeter. La projection de notre point est l'intersection de cette droite et de $(x, y, z, 1)$.

Cette projection est donnée explicitement par la formule $f : \mathcal{S}^3 \setminus PS \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z, w) = \left(\frac{x}{1+w}, \frac{y}{1+w}, \frac{z}{1+w} \right)$.

On a donc une bijection de $\mathcal{S}^3 \setminus PS$ vers \mathbb{R}^3 . Muni de cette bijection, on peut visualiser les valeurs d'une fonction de \mathcal{S}^3 avec « seulement » trois dimensions. Par contre, cette bijection déforme la sphère de dimension trois, c'est-à-dire qu'elle modifie les angles.

4.4. La sphère de dimension trois, vue à l'aide de la projection stéréographique

Si on considère la projection d'une sphère de dimension trois définie en coordonnées hypersphériques $\mathcal{S}^3 = \{(\cos \varphi, \cos \phi \sin \theta \sin \varphi, \sin \phi \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi)\}$, alors on perçoit, lorsque ϕ varie, que la projection tourne autour de l'abscisse. Lorsque φ varie, on voit une sphère qui grossit et qui rétrécit (comme à la figure 3) et lorsque θ varie, on voit un ellipsoïde grossissant jusqu'à devenir une sphère (voir figure 7).

FIGURE 7. \mathcal{S}^2 traverse \mathbb{R}^2

Références

- [1] Edwin A. ABBOTT. *Flatland*. Seely Co., 1884.

ROSEMONDE LAREAU-DUSSAULT, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE
SHERBROOKE

Courriel: `r.lareau@usherbrooke.ca`

FRISES ET TRIANGULATIONS DE POLYGONES

JEAN-SÉBASTIEN FRASER MARTINEAU ET DOMINIQUE LAVERTU

RÉSUMÉ. Dans un article de 1973, Conway et Coxeter étudiaient les propriétés de frises de nombres respectant une certaine "règle unimodulaire". Nous présentons la preuve de leur résultat qui établit une correspondance entre les triangulations de polygones et les frises de nombres entiers positifs.

1. Introduction

En 2002, Fomin et Zelevinsky [FZ02] ont introduit les algèbres amassées pour unifier l'étude de deux questions distinctes : celle de la positivité totale des matrices et celle des bases canoniques des algèbres enveloppantes quantiques.

En partant d'un carquois Q à n points, sans cycle de longueur ≤ 2 et d'un ensemble $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ de générateurs, appelé **amas**, on définit une certaine opération, appelée **mutation**, sur le carquois Q et sur l'amas \mathbb{X} .

Une algèbre amassée sans coefficients est la sous-algèbre du corps $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ des fractions rationnelles en n indéterminées ayant pour générateurs tous les amas \mathbb{X} obtenus par l'application successive de l'opération de mutation.

Fomin et Zelevinsky ont établi qu'une algèbre amassée est de type fini (c'est-à-dire engendrée par un nombre fini d'amas) si et seulement si Q est un carquois de Dynkin. Une famille particulière de carquois de Dynkin est la famille \mathbb{A}_n . C'est à partir de ces carquois que nous construirons les frises dont il sera question dans cet article. La fonction de frise, que nous définirons plus bas, est un cas particulier de la formule de mutation qui permet de passer d'un amas à un autre. C'est cette observation qui a permis récemment de faire le lien avec des travaux passés de Conway et Coxeter sur les frises [CC73].

L'article est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, nous rappelons la définition géométrique des frises, leurs propriétés et leur classification. Les autres sections présentent les principaux résultats de [CC73]. Dans la section 3, nous étudions une fonction particulière qui permet de construire des frises. Dans la section 4, nous présentons une manière systématique d'engendrer toute une classe de frises d'intérêt. Dans la section 5, nous démontrons le résultat principal qui établit une bijection entre triangulations de polygones et frises.

2. Groupes de frise

On rappelle qu'une **isométrie** du plan \mathbb{R}^2 est une application bijective $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui préserve les distances (c'est-à-dire que si $x, y \in \mathbb{R}^2$, alors $|x - y| = |T(x) - T(y)|$). L'ensemble des isométries du plan \mathbb{R}^2 forme un groupe pour la composition des applications, qu'on appelle **le groupe des isométries** du plan et que l'on note $\mathcal{I}(\mathbb{R}^2)$. Un **groupe d'isométries** du plan est un sous-groupe de $\mathcal{I}(\mathbb{R}^2)$.

DÉFINITION 2.1. Un **groupe de frise** \mathcal{F} **de centre** c est un groupe d'isométries du plan tel qu'il existe une droite c invariante par les isométries de \mathcal{F} et tel que l'ensemble des translations de \mathcal{F} forme un groupe cyclique infini [Mar87].

Une **figure** est un sous-ensemble du plan.

DÉFINITION 2.2. Une **frise** est une figure invariante par l'action d'un groupe de frise.

Voici des exemples de frises :

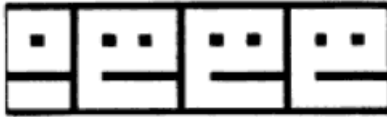
EXEMPLE 2.3. [Ced87]



EXEMPLE 2.4. [Mar87]



EXEMPLE 2.5. [Mar87]



Bien qu'il existe une infinité de frises, on peut les classer en 7 types, selon les isométries les laissant invariantes. Nous allons présenter sommairement cette classification, suivant [Ced87] et [Mar87].

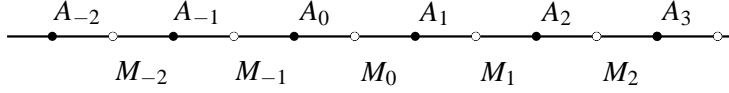
Toute frise est, en vertu de la définition de groupe de frise, invariante par translation. Notons τ un générateur du groupe cyclique infini des translations. C'est une translation minimale qui laisse la frise invariante.

Les autres isométries possibles d'un groupe de frise \mathcal{F} sont

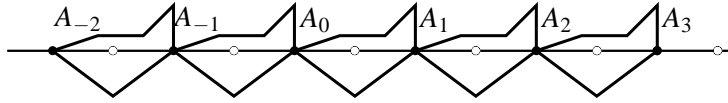
- une rotation ρ_A de π radians autour d'un point A sur la droite c ,
- une réflexion σ_c d'axe c ,
- une réflexion σ_a d'axe a perpendiculaire à c ,
- une transvection γ , c'est-à-dire une réflexion d'axe c suivie d'une translation.

Soit \mathcal{F} un groupe de frise. Si \mathcal{F} contient des rotations ρ de π radians, posons A le centre d'une de ces rotations. Si \mathcal{F} ne contient pas de rotations, mais contient des réflexions σ_a d'axe a perpendiculaire à c , posons a un axe d'une de ces réflexions et A l'intersection de c et a . Sinon, posons A comme étant n'importe quel point de c . Posons

$A_n = \tau^n(A)$. Posons $M = M_0$ le milieu de $\overline{A_0A_1}$ et $M_n = \tau^n(M)$ (ainsi M_n est le milieu de $\overline{A_nA_{n+1}}$).

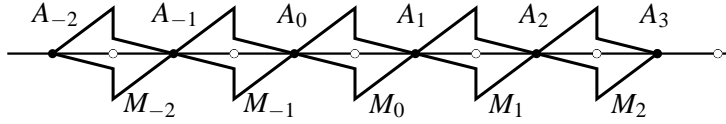


- (1) $\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle$ est le groupe d'isométries d'une frise qui n'est invariante que par translation. Par exemple :



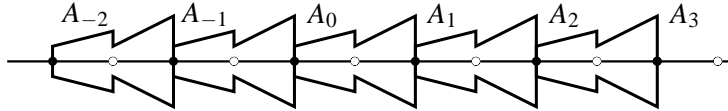
Également, l'exemple 2.5 appartient à ce type.

- (2) $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \rho_A \rangle$ ne contient pas de réflexions (ni d'axe vertical ni d'axe horizontal c) ni de transvection. Comme $\tau \circ \rho_A = \rho_M$, tous les points A_i, M_i sont des centres de rotation. Par exemple :

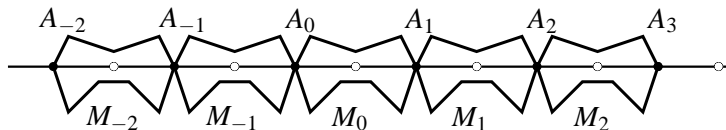


L'exemple 2.3 est aussi de ce type.

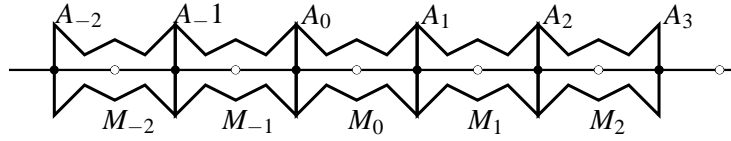
- (3) $\mathcal{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$ contient, en plus des générateurs, des transvections (qui sont la composition d'une translation et d'une réflexion d'axe c). Il ne contient ni rotation, ni réflexion d'axe vertical. Par exemple :



- (4) $\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$ ne contient ni rotation, ni réflexion d'axe c , ni transvection. Il contient $\tau^{2i} \circ \sigma_a$ qui sont les réflexions d'axe perpendiculaire à c passant par A_i et contient aussi les réflexions d'axe perpendiculaire à c passant par M_i , données par $\tau^{2i+1} \circ \sigma_a$. Par exemple :

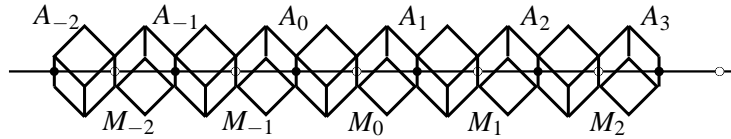


- (5) $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \rho_A, \sigma_c \rangle$ contient toutes les isométries des groupes de frise. En effet, on retrouve les transvections $\tau^n \circ \sigma_c$ et les réflexions d'axe vertical $\rho_{A_i} \circ \sigma_c$. Il contient aussi la rotation de centre M , $\rho_M = \tau \circ \rho_A$, les réflexions d'axe perpendiculaire à c passant par A_i , données par $\tau^{2i} \circ \sigma_a$, et les réflexions d'axe perpendiculaire à c passant par M_i , données par $\tau^{2i+1} \circ \sigma_a$. Par exemple :

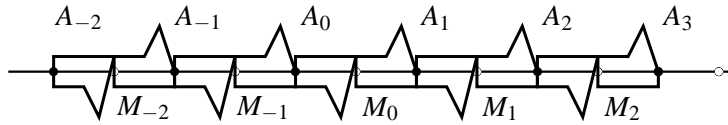


La frise de l'exemple 2.4 possède toutes les isométries ; elle est donc de ce type.

- (6) $\mathcal{F}_2^2 = \langle \tau, \rho_A, \sigma_p \rangle$, où p est la médiatrice du segment \overline{AM} , ne contient pas de réflexion d'axe c , mais contient $\rho_M = \tau \circ \rho_A$, la rotation de centre M . Aussi, $\sigma_p \circ \rho_A$ donne une transvection. Par exemple :



- (7) $\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$ ne contient aucune autre isométrie que les translations et les transvections, car $\gamma^2 = \tau$. Par exemple :



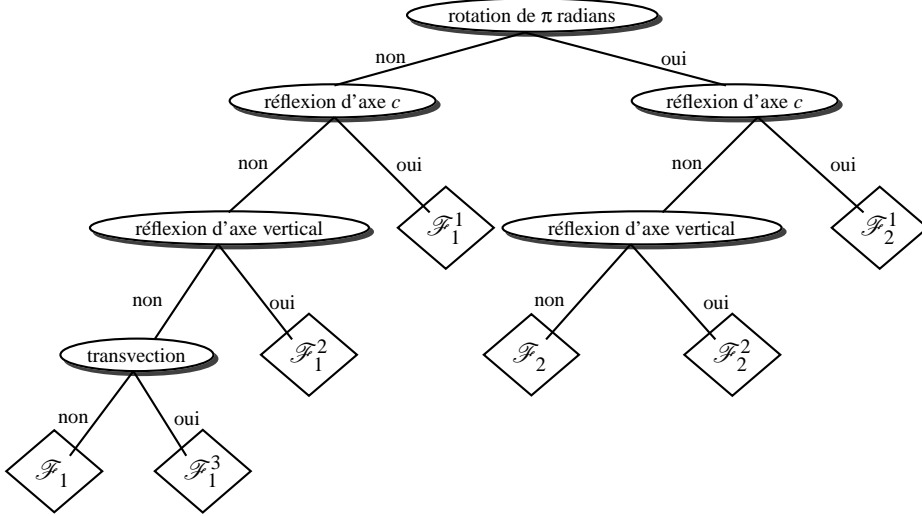
Le tableau [Ced87] résume ce qui précède.

groupe de frise	exemple de frise	τ	ρ_A	σ_c	σ_*	γ
\mathcal{F}_1	LLLLLLLL	✓	-	-	-	-
\mathcal{F}_2	NNNNNNN	✓	✓	-	-	-
\mathcal{F}_1^1	DDDDDDD	✓	-	✓	-	✓
\mathcal{F}_1^2	VVVVVVV	✓	-	-	✓	-
\mathcal{F}_2^1	HHHHHHH	✓	✓	✓	✓	✓
\mathcal{F}_2^2	$\Delta V \Delta V \Delta V \Delta$	✓	✓	-	✓	✓
\mathcal{F}_1^3	LFLFLFL	✓	-	-	-	✓

Note : $\sigma_* = \sigma_a$, sauf pour \mathcal{F}_2^2 où $\sigma_* = \sigma_p$.

Nous avons repris les notations des groupes de frise utilisées dans [Mar87]. Cette notation décrit les isométries de chaque groupe. En effet, l'indice 1 indique l'absence d'une rotation de π radians et l'indice 2, sa présence. L'exposant 1 indique la présence d'une réflexion d'axe c . L'exposant 2 indique qu'il n'y a pas de réflexion d'axe c , mais qu'il y a une réflexion d'axe perpendiculaire à c . L'exposant 3 indique que le groupe est engendré par une transvection.

Le classement des groupes se représente aussi graphiquement.



Cette classification des groupes de frise est complète. On peut trouver la démonstration de ce fait dans [Mar87].

3. Frises

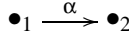
Passons à l'étude des frises de nombres.

DÉFINITION 3.1. Un **carquois** Q est un quadruplet (Q_0, Q_1, s, b) , où Q_0 est un ensemble dont les éléments sont appelés **points**, Q_1 est un ensemble dont les éléments sont appelés **flèches** et $s, b: Q_1 \rightarrow Q_0$ sont des applications qui associent à chaque flèche du carquois ce qu'on appelle sa **source** et son **but**, respectivement.

DÉFINITION 3.2. Étant donné un carquois Q , on définit le carquois $\mathbb{Z}Q$ par

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{Z}Q)_0 &= \mathbb{Z} \times Q_0 = \{(n, x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in Q_0\} \\
 (\mathbb{Z}Q)_1 &= \left\{ (n, \alpha): (n, x) \rightarrow (n, y) \mid n \in \mathbb{Z}, x \xrightarrow{\alpha} y \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ (n, \alpha'): (n-1, y) \rightarrow (n, x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \xrightarrow{\alpha} y \right\}
 \end{aligned}$$

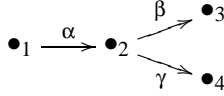
EXEMPLE 3.3. Si Q est le carquois



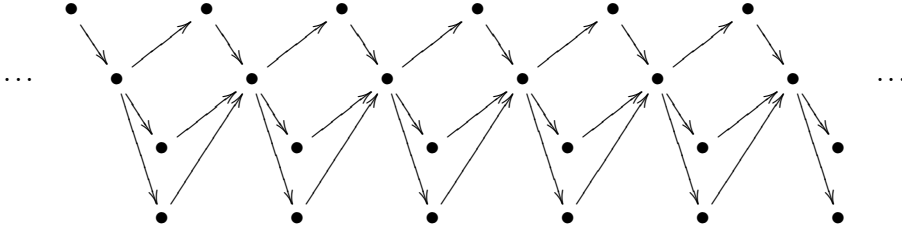
où $Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$ et $s(\alpha) = 1$ et $b(\alpha) = 2$, alors on obtient le carquois $\mathbb{Z}Q$



EXEMPLE 3.4. Si Q est le carquois



où $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ et $s(\alpha) = 1$ et $b(\alpha) = 2$, $s(\beta) = 2$ et $b(\beta) = 3$, $s(\gamma) = 2$ et $b(\gamma) = 4$, alors on obtient le carquois $\mathbb{Z}Q$



DÉFINITION 3.5. Une **fonction de frise** est une fonction $f: (\mathbb{Z}Q)_0 \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que pour tout $(k, p) \in (\mathbb{Z}Q)_0$ on a

$$f(k, p)f(k-1, p) = 1 + \prod_{\substack{\alpha \in (\mathbb{Z}Q)_1 \\ (l, q) \xrightarrow{\alpha} (k, p)}} f(l, q)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un **carquois de type** \mathbb{A}_n est un carquois de la forme



Dans la suite, nous nous intéresserons spécifiquement aux frises sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$. Lorsque $n \geq 2$, la relation qui caractérise la fonction de frise peut s'écrire de la manière suivante :

$$f(k, p)f(k-1, p) = \begin{cases} 1 + f(k-1, p+1) & \text{si } p = 1, \\ 1 + f(k-1, p+1)f(k, p-1) & \text{si } 1 < p < n, \\ 1 + f(k, p-1) & \text{si } p = n. \end{cases}$$

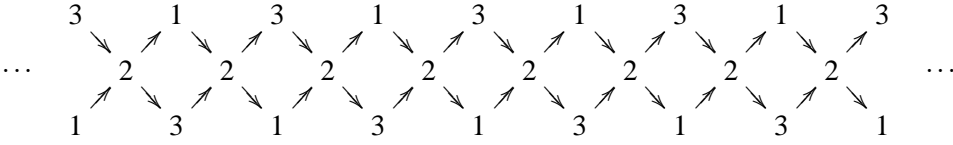
Voici quelques exemples.

EXEMPLE 3.6.



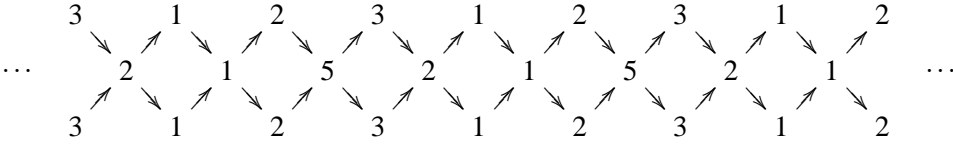
Cette frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_1$ a pour groupe \mathcal{F}_2^1 , car on voit qu'elle est invariante par toutes les isométries possibles d'un groupe de frise. Remarquons que c'est la seule frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_1$ qui ne contienne que des entiers strictement positifs. En effet, comme le carquois ne contient pas de flèche, $\prod_{(l, q) \xrightarrow{\alpha} (k, p)} f(l, q) = 1$, car le produit est vide. Donc on cherche des solutions entières à $f(k, 1)f(k-1, 1) = 2$. La seule possibilité est $f(k, 1) = 1$ et $f(k-1, 1) = 2$ ou inversement.

EXEMPLE 3.7.



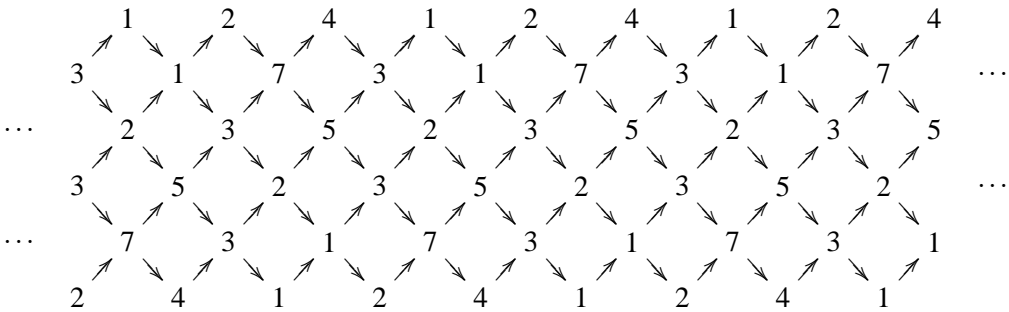
Cette frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_3$ a pour groupe \mathcal{F}_2^2 , car elle est invariante par translation, transvection, réflexion selon un axe vertical et rotation de π radians.

EXEMPLE 3.8.



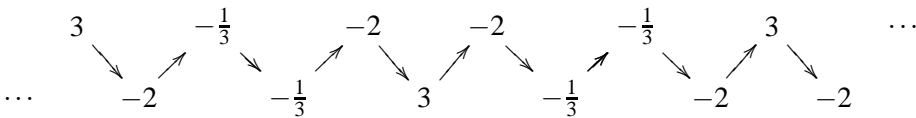
Cette frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_3$ a pour groupe \mathcal{F}_1^1 , car elle est invariante par translation, transvection et réflexion d'axe horizontal.

EXEMPLE 3.9.



Cette frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_6$ a pour groupe \mathcal{F}_1^3 , car on peut vérifier qu'elle est invariante seulement par translation et transvection.

Nous n'avons présenté que des frises contenant des entiers strictement positifs. En effet, bien qu'en général la fonction de frise prenne des valeurs rationnelles, par exemple :



nous ne nous intéresserons qu'aux frises de nombres entiers strictement positifs, que nous appellerons simplement **frise d'entiers positifs**. Nous verrons plus loin des conditions suffisantes pour obtenir de telles frises.

La fonction de frise donne la valeur d'un élément de la frise en fonction de ses voisins. Voyons une manière de déterminer la totalité de la frise à partir d'un certain nombre de ses éléments. Observons que choisir $k \in \mathbb{Z}$ revient à fixer une diagonale de la frise.

PROPOSITION 3.10. *Une frise d'entiers positifs est entièrement déterminée par une diagonale.*

PREUVE. Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ d'entiers positifs. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit de montrer qu'on peut calculer les diagonales adjacentes à partir de la diagonale fixée.

Calculons d'abord les éléments de la diagonale $k + 1$. Pour $p = 1$, on calcule le premier élément.

$$f(k+1, 1) = \frac{1 + f(k, 2)}{f(k, 1)}$$

On calcule ensuite le prochain élément en fonction de l'élément le précédant dans la diagonale. Pour $p \in \{2, \dots, n-1\}$,

$$f(k+1, p) = \frac{1 + f(k, p+1)f(k+1, p-1)}{f(k, p)}$$

et pour $p = n$,

$$f(k+1, n) = \frac{1 + f(k+1, n-1)}{f(k, n)}.$$

Calculons maintenant les éléments de la diagonale $k - 1$. On remarque qu'on calcule d'abord le dernier élément et les suivants en remontant la diagonale. Pour $p = n$,

$$f(k-1, n) = \frac{1 + f(k, n-1)}{f(k, n)},$$

pour $p \in \{n-1, \dots, 2\}$,

$$f(k-1, p) = \frac{1 + f(k, p-1)f(k-1, p+1)}{f(k, p)}$$

et pour $p = 1$,

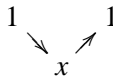
$$f(k-1, 1) = \frac{1 + f(k-1, 2)}{f(k, 1)}.$$

Le fait suivant nous servira plus tard.

LEMME 3.11. *Il ne peut y avoir deux 1 consécutifs sur une rangée d'une frise d'entiers positifs.*

PREUVE. Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ d'entiers positifs. Si $n = 1$, il n'existe qu'une seule frise et le résultat est trivial (voir l'exemple 3.6). Si $n \geq 2$, examinons les cas possibles.

- Supposons qu'on retrouve deux 1 consécutifs dans la première rangée.



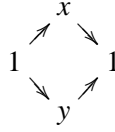
Alors $1 = \frac{1+x}{1}$, donc $x = 0$, ce qui est impossible car les éléments de la frise sont strictement positifs.

- Supposons qu'on retrouve deux 1 consécutifs sur la dernière rangée.



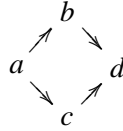
De la même manière, $x = 0$, une contradiction.

- Si $n \geq 3$, supposons que les deux 1 se trouvent sur une rangée intermédiaire.



Alors, $1 = \frac{1+xy}{1}$, d'où $xy = 0$, ce qui est impossible, car x et y sont non nuls, en vertu de l'hypothèse.

Une **maille** d'une frise est une portion de la frise de la forme

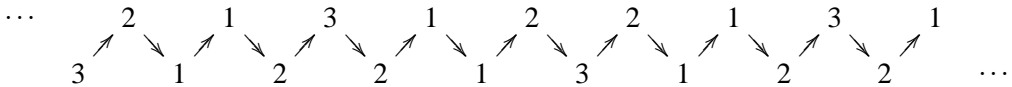


où $a = f(k-1, p)$, $b = f(k, p-1)$, $c = f(k-1, p+1)$ et $d = f(k, p)$, pour un $k \in \mathbb{Z}$ (qui fixe la diagonale passant par b et d) et un $p \in Q_0$ (qui fixe la rangée contenant a et d). Remarquons qu'alors la définition de la fonction de frise peut s'exprimer de manière équivalente sous la forme d'un déterminant :

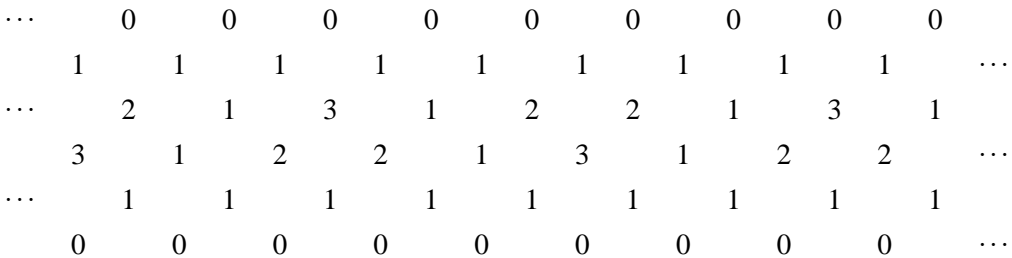
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

ce qui implique que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient au groupe spécial linéaire $SL_2(\mathbb{Z})$. Dans [CC73], cette propriété est appelée la **règle unimodulaire**. À partir d'une frise donnée, on peut utiliser la règle unimodulaire pour étendre la frise vers le haut et vers le bas. On peut vérifier que la première rangée ajoutée est formée de 1 et que la rangée au-dessus est formée de 0. De même, au bas de la frise, la première rangée ajoutée est formée de 1 et la rangée au-dessous est formée de 0.

Ainsi, la frise



devient



Il est à noter que ces rangées de 1 et de 0 ne font pas à proprement parler partie de la frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$. La fonction de frise permet de calculer sur les éléments du bord de la frise, alors que la règle unimodulaire ne permet de calculer que sur les mailles.

Avec l'ajout des rangées de 1, on peut utiliser la règle unimodulaire pour faire le même calcul qu'avec la fonction de frise.

Comme ces deux façons de faire sont équivalentes, lorsque nous utiliserons la règle unimodulaire et les rangées de 1 et de 0, nous appellerons cette frise une **frise étendue**. À ce moment, nous ne mettrons pas les flèches puisqu'elles font référence à la fonction de frise sur un carquois $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$.

Fixons quelques notations. Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ d'entiers positifs. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

Posons

$$u_s = \begin{cases} 0 & s = -1, \\ 1 & s = 0, \\ f(k, s) & 1 \leq s \leq n, \\ 1 & s = n+1, \\ 0 & s = n+2. \end{cases} \quad v_s = \begin{cases} -1 & s = -1, \\ 0 & s = 0, \\ 1 & s = 1, \\ f(k+1, 1) & s = 2, \\ \frac{u_s v_{s-1} + 1}{u_{s-1}} & 3 \leq s \leq n+1, \\ 1 & s = n+2, \\ 0 & s = n+3. \end{cases}$$

Posons aussi, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $d_i = f(k+i, 1)$ les éléments de la première rangée. On voit que, par définition, $u_1 = d_0$ et $v_2 = d_1$. Alors on peut écrire une partie de la frise ainsi :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} u_{-1} & & v_0 & & 0 & & \dots & & 0 & & 0 & & & & & \\ & u_0 & & v_1 & & 1 & & \dots & & 1 & & 1 & & & & \\ & & u_1 & & v_2 & & d_2 & & \dots & & d_{n-1} & & d_n & & & \\ \dots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \dots \\ & & & u_n & & v_{n+1} & & f(k+2, n) & & \dots & & f(k+n-1, n) & & f(k+n, n) & & \\ & & & & u_{n+1} & & v_{n+2} & & 1 & & \dots & & 1 & & 1 & \\ & & & & & u_{n+2} & & v_{n+3} & & 0 & & \dots & & 0 & & 0 \end{array}$$

Posons ensuite $a_{r,s} = \begin{vmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{vmatrix}$ où $-1 \leq r, s \leq n+2$. Ces déterminants respectent les propriétés suivantes.

LEMME 3.12.

- (1) $a_{r,r} = 0$;
- (2) $a_{r,s} + a_{s,r} = 0$;
- (3) $a_{r,s}a_{t,u} + a_{r,t}a_{u,s} + a_{r,u}a_{s,t} = 0$;
- (4) $a_{-1,s} = u_s$;
- (5) $a_{0,s} = v_s$;
- (6) $a_{s-1,s} = 1$;
- (7) $\begin{vmatrix} a_{r-1,s} & a_{r,s} \\ a_{r-1,s+1} & a_{r,s+1} \end{vmatrix} = 1$.

PREUVE.

$$(1) \ a_{r,r} = \begin{vmatrix} u_r & u_r \\ v_r & v_r \end{vmatrix} = u_r v_r - u_r v_r = 0$$

$$(2) \ a_{r,s} = \begin{vmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{vmatrix} = u_r v_s - u_s v_r = -(u_s v_r - u_r v_s) = - \begin{vmatrix} u_s & u_r \\ v_s & v_r \end{vmatrix} = -a_{s,r}$$

(3) *Développons chaque terme de l'équation.*

$$\begin{aligned} a_{r,s} a_{t,u} &= \begin{vmatrix} u_r & u_s \\ v_r & v_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_t & u_u \\ v_t & v_u \end{vmatrix} \\ &= (u_r v_s - u_s v_r)(u_t v_u - u_u v_t) \\ &= u_r u_t v_s v_u - u_s u_t v_r v_u - u_r u_u v_s v_t + u_s u_u v_r v_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{r,t} a_{u,s} &= \begin{vmatrix} u_r & u_t \\ v_r & v_t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_u & u_s \\ v_u & v_s \end{vmatrix} \\ &= (u_r v_t - u_t v_r)(u_u v_s - u_s v_u) \\ &= u_r u_u v_s v_t - u_t u_u v_r v_s - u_r u_s v_t v_u + u_s u_t v_r v_u \end{aligned}$$

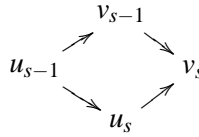
$$\begin{aligned} a_{r,u} a_{s,t} &= \begin{vmatrix} u_r & u_u \\ v_r & v_u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{vmatrix} \\ &= (u_r v_u - u_u v_r)(u_s v_t - u_t v_s) \\ &= u_r u_s v_t v_u - u_s u_u v_r v_t - u_r u_t v_s v_u + u_t u_u v_r v_s \end{aligned}$$

De là on voit que $a_{r,s} a_{t,u} + a_{r,t} a_{u,s} + a_{r,u} a_{s,t} = 0$.

$$(4) \ a_{-1,s} = \begin{vmatrix} u_{-1} & u_s \\ v_{-1} & v_s \end{vmatrix} = 0 \cdot v_s - u_s(-1) = u_s$$

$$(5) \ a_{0,s} = \begin{vmatrix} u_0 & u_s \\ v_0 & v_s \end{vmatrix} = 1 \cdot v_s - u_s \cdot 0 = v_s$$

(6) *En effet, on a*



$$d'où \ a_{s-1,s} = \begin{vmatrix} u_{s-1} & u_s \\ v_{s-1} & v_s \end{vmatrix} = u_{s-1} v_s - u_s v_{s-1} = 1.$$

(7) *En effet,*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{r-1,s} & a_{r,s} \\ a_{r-1,s+1} & a_{r,s+1} \end{vmatrix} &= a_{r-1,s} a_{r,s+1} - a_{r-1,s+1} a_{r,s} \\ &= a_{r-1,s} a_{r,s+1} + a_{r-1,s+1} a_{s,r} \text{ (propriété 2)} \\ &= -a_{r-1,r} a_{s+1,s} \text{ (propriété 3)} \\ &= a_{r-1,r} a_{s,s+1} \text{ (propriété 2)} \\ &= 1 \text{ (propriété 6).} \end{aligned}$$

La dernière propriété est l'expression de la règle unimodulaire appliquée à la partie de frise suivante.

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{-1,-1} & a_{0,0} & a_{1,1} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-1,n-1} & & \\
& a_{-1,0} & a_{0,1} & a_{1,2} & \dots & a_{n-2,n-1} & a_{n-1,n} & \\
& & a_{-1,1} & a_{0,2} & a_{1,3} & \dots & a_{n-2,n} & a_{n-1,n+1} \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
& & & & a_{-1,n} & a_{0,n+1} & a_{1,n+2} & \dots \\
& & & & & a_{-1,n+1} & a_{0,n+2} & a_{1,n+3} \dots \\
& & & & & & a_{-1,n+2} & a_{0,n+3}
\end{array}$$

Selon le lemme 3.12(4), $a_{-1,s} = u_s$ (pour $-1 \leq s \leq n+2$). Ainsi cette frise et la frise donnée plus haut ont une diagonale en commun. Mais puisqu'une frise est entièrement déterminée par une diagonale (proposition 3.10), ces frises sont identiques. En particulier, $d_s = a_{s-1,s+1}$ (pour $0 \leq s \leq n+1$).

Ces notations permettent d'établir les résultats suivants.

THÉOREME 3.13. *Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ d'entiers positifs et soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors les éléments de la première rangée $d_0, d_1, \dots, d_n, d_{n+1}$ s'expriment en fonction des éléments de la diagonale $u_{-1}, u_0, \dots, u_{n+2}$ et, réciproquement, les éléments de la diagonale u_1, \dots, u_{n+2} s'expriment en fonction des éléments de la première rangée d_0, d_1, \dots, d_{n+1} .*

PREUVE. *Commençons par montrer que les éléments de la première rangée s'expriment en fonction de ceux de la diagonale.*

Comme $d_s = a_{s-1,s+1}$ (pour $0 \leq s \leq n+1$), on a

$$\begin{aligned}
a_{s-1,s+1}a_{-1,s} &= -a_{s-1,s}a_{s+1,-1} - a_{s-1,-1}a_{s,s+1} \text{ (propriété 3)} \\
&= a_{s-1,s}a_{-1,s+1} + a_{-1,s-1}a_{s,s+1} \text{ (propriété 2)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
d_s &= a_{s-1,s+1} \\
&= \frac{a_{s-1,s}a_{-1,s+1} + a_{-1,s-1}a_{s,s+1}}{a_{-1,s}} \\
&= \frac{1 \cdot u_{s+1} + u_{s-1} \cdot 1}{u_s} \text{ (propriétés 4 et 6)} \\
&= \frac{u_{s-1} + u_{s+1}}{u_s}
\end{aligned}$$

Montrons ensuite que les éléments de la diagonale s'expriment en fonction de ceux de la première rangée.

La preuve se fait par récurrence. Nous voulons montrer que, pour $1 \leq s \leq n+2$,

$$u_s = \begin{vmatrix} d_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{s-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{s-1} \end{vmatrix}.$$

Pour $s = 1$, $u_1 = a_{-1,1} = d_0$.

Soit $s > 1$. On suppose la formule vérifiée pour tout $r < s + 1$. Puisqu'on a montré ci-haut que $d_s = \frac{u_{s-1} + u_{s+1}}{u_s}$, on peut écrire $u_{s+1} = d_s u_s - u_{s-1}$. Ainsi, en vertu de l'hypothèse de récurrence,

$$u_{s+1} = d_s \begin{vmatrix} d_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{s-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{s-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{s-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{s-2} \end{vmatrix}.$$

C'est le développement selon la dernière ligne du déterminant suivant :

$$u_{s+1} = \begin{vmatrix} d_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_{s-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_s \end{vmatrix}.$$

On peut généraliser cette dernière formule à tout élément de la frise.

COROLLAIRE 3.14. Pour $2 \leq s - r \leq n + 2$,

$$a_{r,s} = \begin{vmatrix} d_{r+1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & d_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{s-2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-1} \end{vmatrix}$$

PREUVE. La définition de $a_{r,s}$ dépend d'une diagonale k fixée. Plaçons-nous sur la diagonale $k' = k + r + 1$. Alors on a $d'_i = f(k' + i, 1) = f(k + r + 1 + i, 1) = d_{r+1+i}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Alors $d'_{-1,s-r-1} = a_{r,s}$, d'où

$$\begin{aligned} a_{r,s} &= d'_{-1,s-r-1} = u'_{s-r-1} \text{ (lemme 3.12(4))} \\ &= \begin{vmatrix} d'_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & d'_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d'_{s-r-3} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d'_{s-r-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{r+1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & d_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{s-2} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_{s-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque. Observons que la formule obtenue pour $a_{r,s}$ est l'expression du polynôme de Tchebychev généralisé $P_{s-r-2}(d_{r+1}, d_{r+2}, \dots, d_{s-1})$ [Dup09, Corollaire 3.3].

On peut désormais établir des conditions suffisantes pour avoir une frise d'entiers positifs.

PROPOSITION 3.15. *Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$. Si une diagonale k de la frise est telle que*

$$(1) \quad u_s \mid (u_{s-1} + u_{s+1})$$

$$(2) \quad u_s > 0$$

pour $(0 \leq s \leq n+1)$, alors la frise ne contient que des entiers strictement positifs.

PREUVE. *On a alors,*

$$d_s = \frac{u_{s-1} + u_{s+1}}{u_s} \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Ainsi d_0, \dots, d_{n+1} sont entiers et strictement positifs. Donc les $a_{r,s}$ sont entiers, en vertu du corollaire 3.14, et tous les entiers de la frise sont strictement positifs, en vertu de la proposition 3.10.

4. Cycles polygonaux

La première rangée d'une frise d'entiers positifs respecte des propriétés particulières.

PROPOSITION 4.1. *Soit f une fonction de frise sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ d'entiers positifs et soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors la suite $\{d_0, d_1, \dots\}$ est périodique de période $n+3$.*

PREUVE. *Pour $-1 \leq r \leq n+2$, on a $a_{r,r+n+3} = 0$ et $a_{r+1,r+n+3} = 1$.*

Or, en vertu du lemme 3.12(3),

$$a_{r,s}a_{r+1,r+n+3} + a_{r,r+1}a_{r+n+3,s} + a_{r,r+n+3}a_{s,r+1} = 0$$

mais

$$a_{r+1,r+n+3} = 1, \quad a_{r,r+1} = 1 \quad \text{et} \quad a_{r,r+n+3} = 0,$$

d'où

$$a_{r,s} + a_{r+n+3,s} = 0$$

et donc

$$a_{r,s} = a_{s,r+n+3}.$$

En appliquant cette dernière égalité à $a_{s,r+n+3}$, on obtient

$$a_{s,r+n+3} = a_{r+n+3,s+n+3},$$

d'où

$$a_{r,s} = a_{r+n+3,s+n+3}.$$

Donc, en particulier, $d_0 = a_{-1,1} = a_{n+2,n+4} = d_{n+3}$.

Remarque. Cela montre également que, pour toute frise d'entiers positifs, il existe une transvection et une translation qui fixent la frise.

DÉFINITION 4.2. Dans une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$, l'ensemble des éléments $\{d_0, d_1, \dots, d_{n+2}\}$ de la première rangée est appelé **cycle polygonal d'ordre $n+3$** . Notons qu'un cycle polygonal est nécessairement d'ordre $p \geq 4$, car $n \geq 1$.

Observons le fait suivant.

LEMME 4.3. *Un cycle polygonal contient au moins un 1.*

PREUVE. *Supposons au contraire que $d_s \geq 2$ pour tout $0 \leq s \leq n+2$.*

Or,

$$d_s = \frac{u_{s-1} + u_{s+1}}{u_s},$$

d'où

$$u_{s+1} = d_s u_s - u_{s-1} \geq 2u_s - u_{s-1}.$$

Ainsi, en soustrayant u_s de part et d'autre de l'inégalité, on obtient

$$u_{s+1} - u_s \geq u_s - u_{s-1} \geq \cdots \geq u_1 - u_0 = d_0 - 1 > 0.$$

Donc la suite des u_s est strictement croissante, ce qui contredit $u_{n+1} = 1$.

Considérons une transformation inversible qui permet de passer d'une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ à une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{n+1}$.

THÉORÈME 4.4. *Soit $0 \leq i \leq n+2$. Il existe une transformation inversible \mathcal{T}_i de l'ensemble des cycles polygonaux d'ordre $n+3$ vers l'ensemble des cycles polygonaux d'ordre $n+4$.*

PREUVE. *Soit $\{d_0, d_1, \dots, d_{n+2}\}$ un cycle polygonal d'ordre $n+3$. Alors on définit*

$$\mathcal{T}_i: (\dots, d_{i-1}, d_i, d_{i+1}, d_{i+2}, \dots) \mapsto (\dots, d_{i-1}, d_i + 1, 1, d_{i+1} + 1, d_{i+2}, \dots).$$

Vérifions d'abord que le résultat de cette transformation est bien un cycle polygonal d'ordre $n+4$. Il suffit de montrer que la suite résultante forme la première rangée d'une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{n+1}$.

Prenons la suite $\{u_s\}$ des éléments de la diagonale passant par d_{i-1} . Alors, en vertu du théorème 3.13, on peut exprimer en fonction de u_{i-1} , u_i , u_{i+1} , u_{i+2} les éléments

$$d_i = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{u_i} \quad \text{et} \quad d_{i+1} = \frac{u_i + u_{i+2}}{u_{i+1}}.$$

On a

$$d_i + 1 = \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{u_i} + 1 = \frac{u_{i-1} + (u_i + u_{i+1})}{u_i},$$

$$1 = \frac{u_i + u_{i+1}}{u_i + u_{i+1}}$$

et

$$d_{i+1} + 1 = \frac{u_i + u_{i+2}}{u_{i+1}} + 1 = \frac{(u_i + u_{i+1}) + u_{i+2}}{u_{i+1}}.$$

Donc $u_i \mid u_{i-1} + (u_i + u_{i+1})$ et $u_{i+1} \mid (u_i + u_{i+1}) + u_{i+2}$, car $d_i + 1$ et $d_{i+1} + 1$ sont entiers. On en conclut que si la portion de la diagonale $(\dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots)$ devient $(\dots, u_{i-1}, u_i, u_i + u_{i+1}, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots)$, cette nouvelle diagonale sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_{n+1}$ respecte la condition $u_s \mid u_{s-1} + u_{s+1}$ et donc, en vertu de la proposition 3.15, définit une frise d'entiers positifs. Ceci montre que $(\dots, d_{i-1}, d_i + 1, 1, d_{i+1} + 1, d_{i+2}, \dots)$ est un cycle polygonal d'ordre $n+4$.

Il reste à montrer que \mathcal{T}_i admet un inverse \mathcal{S}_i . Soit $\{d_0, d_1, \dots, d_{n+3}\}$ un cycle polygonal d'ordre $n+4$. En vertu du lemme 4.3, tout cycle polygonal contient au moins un 1. De plus, le lemme 3.11 implique que les voisins d'un 1 sont strictement plus grands que 1. On peut supposer, sans perte de généralité, que $d_{i+1} = 1$ et $d_i, d_{i+2} > 1$.

Ainsi, posons

$$S_i : (\dots, d_{i-1}, d_i, 1, d_{i+2}, d_{i+3}, \dots) \mapsto (\dots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+2} - 1, d_{i+3}, \dots).$$

Il faut montrer que le résultat est bien un cycle polygonal d'ordre $n + 3$. Comme plus haut, il suffit de montrer que la suite résultante forme la première rangée d'une frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$.

Prenons la suite $\{u_s\}$ des éléments de la diagonale passant par d_i . Alors on a, en vertu du théorème 3.13,

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{u_{i-1} + u_{i+1}}{u_i}, \\ d_{i+1} &= \frac{u_i + u_{i+2}}{u_{i+1}}, \\ d_{i+2} &= \frac{u_{i+1} + u_{i+3}}{u_{i+2}}. \end{aligned}$$

Mais $d_{i+1} = 1$ implique que $u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} d_i - 1 &= \frac{u_{i-1} + u_{i+1} - u_i}{u_i} = \frac{u_{i-1} + u_{i+2}}{u_i}, \\ d_{i+2} - 1 &= \frac{u_{i+1} + u_{i+3} - u_{i+2}}{u_{i+2}} = \frac{u_i + u_{i+3}}{u_{i+2}}. \end{aligned}$$

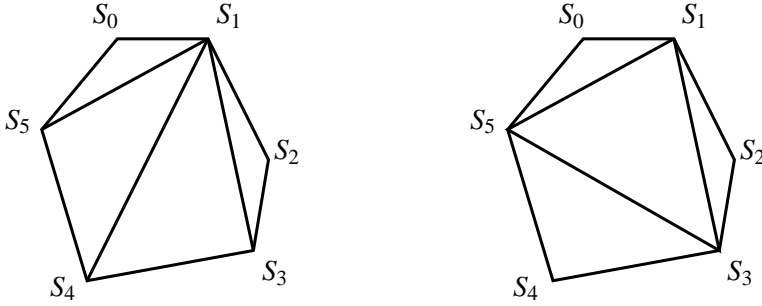
Puisque $d_i - 1$ et $d_{i+2} - 1$ sont entiers, alors $u_i \mid u_{i-1} + u_{i+2}$ et $u_{i+2} \mid u_i + u_{i+3}$. On en conclut que si la portion de la diagonale $(\dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, \dots)$ devient $(\dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+2}, u_{i+3}, \dots)$, cette nouvelle diagonale sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ respecte la condition $u_s \mid u_{s-1} + u_{s+1}$ et donc, en vertu de la proposition 3.15, définit une frise d'entiers positifs. Ceci montre que $(\dots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+2} - 1, d_{i+3}, \dots)$ est un cycle polygonal d'ordre $n + 3$.

Il est immédiat que S_i est l'inverse de \mathcal{T}_i .

Remarque. Ce théorème permet d'affirmer que tout cycle polygonal peut être obtenu à partir d'un cycle polygonal d'ordre inférieur. Ainsi, tout cycle polygonal est engendré par des applications successives de transformations \mathcal{T}_i au cycle polygonal $\{1, 2, 1, 2\}$ correspondant à l'unique frise d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_1$ (voir l'exemple 3.6).

5. Triangulations

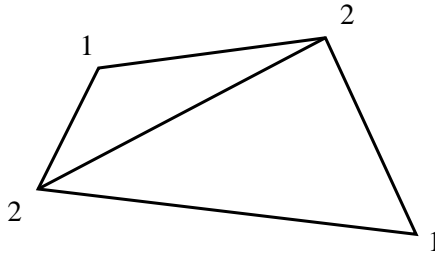
Nous noterons S_0, S_1, \dots, S_{p-1} les sommets d'un polygone à p côtés. Pour nos besoins, un polygone n'est pas nécessairement régulier, mais il doit être convexe. On appelle **triangulation** d'un polygone à p côtés tout découpage en $p - 2$ triangles de ce polygone par $p - 3$ diagonales non sécantes [CC73]. Par exemple, voici deux triangulations d'un hexagone :



Étant donné une triangulation d'un polygone à p côtés, soit i tel que $0 \leq i \leq p-1$. On note Δ_i le nombre de triangles ayant S_i pour sommet. Nous nous intéresserons à la suite $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$. Ainsi, deux triangulations qui, par une numérotation appropriée des sommets, peuvent engendrer la même suite seront considérées équivalentes.

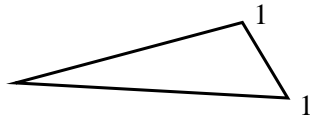
LEMME 5.1. *Si $p \geq 4$, alors il existe i, j distincts, tels que $\Delta_i = \Delta_j = 1$. En outre, S_i n'est pas adjacent à S_j .*

PREUVE. *On le voit facilement en envisageant une triangulation comme une construction où l'on juxtapose successivement des triangles. Si $p = 4$, on voit que l'énoncé est vrai.*

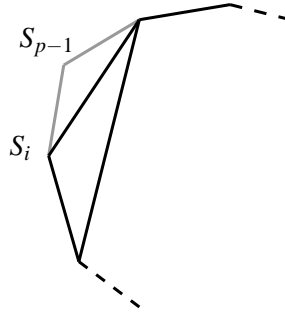


Supposons $p > 4$ et l'énoncé vrai pour $p-1$, alors toute triangulation d'un polygone à $p-1$ côtés est telle que $\Delta_i = \Delta_j = 1$ pour certains i, j distincts.

Considérons un polygone à p côtés. Supposons que le sommet S_i est adjacent au sommet S_j . Alors ces deux sommets font partie du même triangle et déterminent un de ses côtés. Puisque $\Delta_i = \Delta_j = 1$, cela veut dire que les deux autres côtés du triangle ne touchent à aucun autre triangle.



Donc le polygone considéré est nécessairement un triangle, ce qui contredit $p > 4$. Ainsi, il est impossible d'ajouter un seul triangle qui modifie à la fois Δ_i et Δ_j . On peut donc distinguer deux cas. Si l'ajout du triangle ne modifie ni Δ_i , ni Δ_j , on a toujours $\Delta_i = \Delta_j = 1$. Ainsi supposons, sans perte de généralité, que le triangle ajouté modifie Δ_i . Alors le sommet S_{p-1} ajouté au polygone est seulement adjacent à ce triangle.



Donc $\Delta_{p-1} = \Delta_j = 1$ avec $p-1$ et j distincts.

Nous en arrivons au théorème principal.

THÉORÈME 5.2. *Les cycles polygonaux d'ordre p sont en bijection avec les triangulations d'un polygone à p côtés.*

PREUVE. Soit $\{d_0, \dots, d_{p-1}\}$ un cycle polygonal d'ordre p . On veut lui associer une triangulation d'un polygone à p côtés. Montrons par récurrence que $(d_0, d_1, \dots, d_{p-1}) = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$. Si $p = 4$, l'unique cycle polygonal d'ordre 4 (voir l'exemple 3.6) correspond à la triangulation d'un quadrilatère. Autrement dit,

$$(d_0, d_1, d_2, d_3) = (1, 2, 1, 2) = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

Soient $p > 4$ et $\{d_0, d_1, \dots, d_{p-1}\}$ un cycle polygonal d'ordre p . En vertu du lemme 4.3, on peut supposer, sans perte de généralité, que $d_{p-1} = 1$. Selon le théorème 4.4,

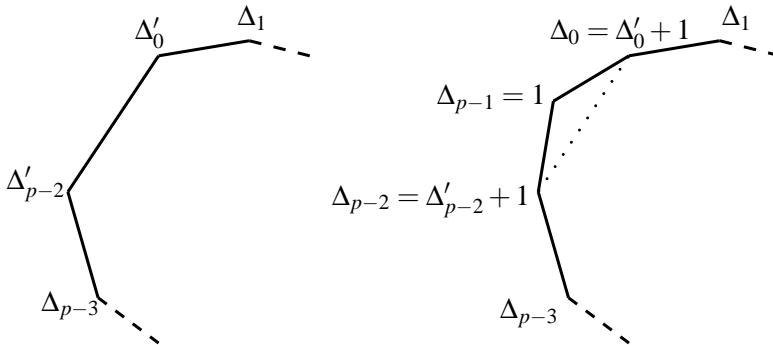
$$S_{p-2}(d_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d_{p-2}, d_{p-1}) = (d'_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2})$$

est un cycle polygonal d'ordre $p-1$, où $d'_0 = d_0 - 1$ et $d'_{p-2} = d_{p-2} - 1$. Ainsi, en vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une triangulation d'un polygone à $p-1$ côtés telle que $(\Delta'_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-3}, \Delta'_{p-2}) = (d'_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2})$.

La transformation inverse

$$\mathcal{T}_{p-2}(d'_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2}) = (d'_0 + 1, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2} + 1, 1) = (d_0, d_1, \dots, d_{p-1})$$

correspond à l'ajout d'un triangle à la triangulation du polygone à $p-1$ côtés.



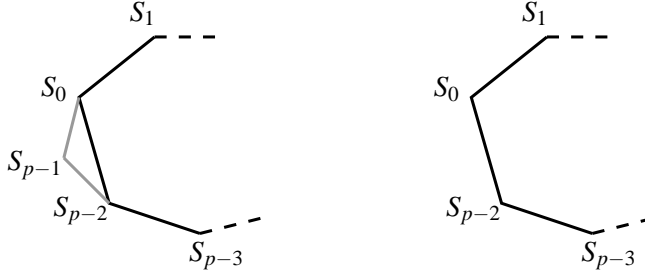
Le côté $\overline{S_0 S_{p-2}}$ du polygone à $p-1$ côtés devient une diagonale de la triangulation du polygone à p côtés pour laquelle on a

$$(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1}) = (\Delta'_0 + 1, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-3}, \Delta'_{p-2} + 1, \Delta_{p-1})$$

et $(d_0, d_1, \dots, d_{p-1}) = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$, selon la définition de \mathcal{T}_{p-2} .

Réciproquement, montrons que si on a une triangulation d'un polygone à p côtés, alors il existe un cycle polygonal d'ordre p tel que $(d_0, d_1, \dots, d_{p-1}) = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$.

La preuve se fait par récurrence. Si $p = 4$, la triangulation du quadrilatère correspond à un cycle polygonal d'ordre 4. Soit $p > 4$. Considérons une triangulation d'un polygone à p côtés. En vertu du lemme 5.1, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\Delta_{p-1} = 1$, alors $\Delta_0 > 1$ et $\Delta_{p-2} > 1$. On veut montrer que $(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$ est un cycle polygonal d'ordre p . En retirant le triangle $S_0S_{p-1}S_{p-2}$, c'est-à-dire les côtés $\overline{S_0S_{p-1}}$ et $\overline{S_{p-1}S_{p-2}}$, on se ramène à une triangulation d'un polygone à $p-1$ côtés pour laquelle $\Delta'_0 = \Delta_0 - 1$ et $\Delta'_{p-2} = \Delta_{p-2} - 1$.



Or, en vertu de l'hypothèse de récurrence,

$$(\Delta'_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-3}, \Delta'_{p-2}) = (d'_0, d_1, \dots, d_{p-3}, d'_{p-2})$$

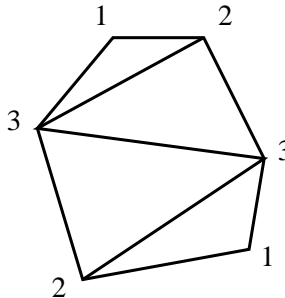
est un cycle polygonal d'ordre $p-1$. Donc

$$\mathcal{T}_{p-2}(d'_0, d_1, \dots, d'_{p-2}) = (d'_0 + 1, d_1, \dots, d'_{p-2} + 1, 1) = (\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1})$$

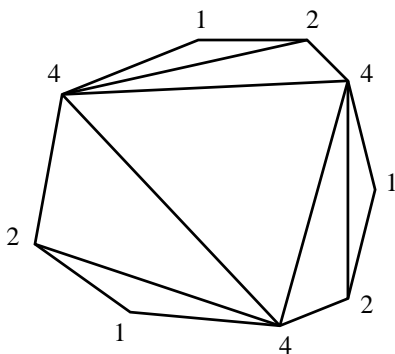
est, selon la définition de \mathcal{T}_{p-2} , un cycle polygonal d'ordre p .

COROLLAIRE 5.3. Les frises d'entiers positifs sur $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ sont en bijection avec les triangulations d'un polygone à $n+3$ côtés. \square

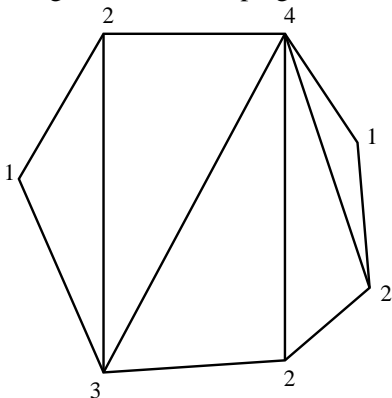
EXEMPLE 5.4. Cette triangulation d'un hexagone correspond à la frise de l'exemple 3.8.



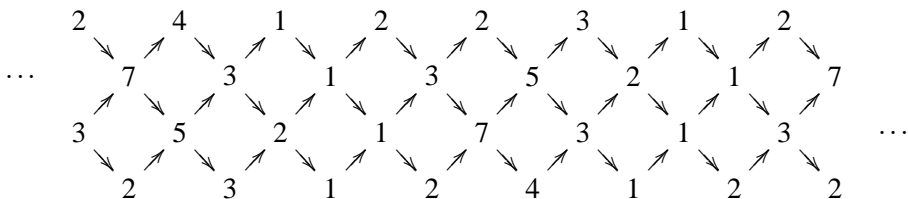
EXEMPLE 5.5. Cette triangulation d'un enneagone correspond à la frise de l'exemple 3.9.



EXEMPLE 5.6. Cette triangulation d'un heptagone



correspond à la frise suivante.



Références

- [CC73] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, The Mathematical Gazette **57** (1973), no. 400, 87–94.
- [Ced87] Judith N. Cederberg, *A course in modern geometries*, Springer-Verlag, 1987.
- [Dup09] Grégoire Dupont, *Cluster multiplication in regular components via generalized Chebyshev polynomials*, ArXiv e-prints (2009).
- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I : Foundations*, Journal of the American Mathematical Society **15** (2002), no. 2.
- [Mar87] George E. Martin, *Transformation geometry : an introduction to symmetry*, Springer-Verlag, 1987.

JEAN-SÉBASTIEN FRASER MARTINEAU, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE
SHERBROOKE

Courriel: jean-sebastien.fraser.martineau@usherbrooke.ca

DOMINIQUE LAVERTU, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: dominique.lavertu@usherbrooke.ca

ROTATION D'UN OBJET RIGIDE

NICOLAS BUREAU

RÉSUMÉ. Trouver une équation générale qui puisse représenter exactement la rotation d'une boule en trois dimensions (sur une table de billard, par exemple) n'est pas chose facile. La plupart des représentations virtuelles, tels que les jeux ou les animations, utilisent une approximation simple. En effet, une façon souvent utilisée pour animer la rotation d'une boule est de déterminer son équation de vitesse angulaire par l'intermédiaire de notions de physique mécanique de base. Ensuite, de façon similaire, on détermine l'équation de position angulaire autour de l'axe de rotation et on affiche celle-ci à l'écran en sectionnant le temps en de très petits intervalles. Cette méthode est bonne, mais malheureusement pas exacte, d'où le but de cette recherche.

L'article qui suit fait référence au rapport de recherche nommé *Rotation d'un corps rigide*. La plupart des calculs vous ont été épargnés. La majeure partie de cet article décrit la problématique, introduit la matière et les représentations utilisées, analyse les pistes entreprises et analyse aussi les résultats obtenus.

1. Objectif et motivation

Le but principal de cette recherche est de trouver une équation générale qui puisse représenter exactement la rotation d'une boule en trois dimensions (sur une table de billard, par exemple). La plupart des représentations virtuelles, tels que les jeux ou les animations, utilisent une approximation simple. En effet, une façon souvent utilisée pour animer la rotation d'une boule est de déterminer son équation de vitesse angulaire (représentée par le vecteur tridimensionnel $\vec{\omega}(t)$ au temps t) par l'intermédiaire de notions de physique mécanique de base. Ensuite, de façon similaire, on détermine l'équation de position angulaire autour de l'axe de rotation décrite par $\vec{\omega}(t)$ et on affiche celle-ci à l'écran en sectionnant le temps en de très petits intervalles. Cette méthode est bonne, mais malheureusement pas exacte. Au billard, une boule, une fois frappée, peut avoir trois états : le roulement, le « spin » et le glissement. Le premier type signifie que la rotation de la boule est causée uniquement par le frottement avec le table, ce qui résulte en une vitesse linéaire. Ainsi, on peut déterminer la position angulaire de cet état facilement avec des équations en deux dimensions. Le deuxième type, le « spin », est lorsque la balle tourne autour d'un axe fixe, perpendiculaire à la table, donc

celle-ci n'a aucune vitesse linéaire, seulement angulaire. Le glissement est l'état d'une boule juste avant de rouler. Cette dernière, au lieu d'avoir une vitesse angulaire déterminée par la vitesse linéaire (due au frottement), va glisser sur la table, ayant un axe de rotation qui n'est pas fixe. Cet état dure habituellement un très court laps de temps. C'est justement l'équation du glissement qui est souvent approximée lors des animations, c'est pourquoi il serait intéressant d'en développer une qui représenterait exactement le mouvement angulaire de la boule de billard.

Ainsi, ce qui nous intéresse c'est de trouver une représentation simple pour appliquer aux mouvements d'une balle de billard, mais, pour ce faire, il serait plus approprié de commencer par s'intéresser à la forme analytique d'un mouvement de rotation d'un objet rigide. On sait tout d'abord qu'il existe deux types de mouvements : le mouvement spatial et celui angulaire. Le premier se calcule avec des équations linéaires, telle que la vitesse linéaire qui, une fois intégrée par rapport au temps, nous donne exactement la position spatiale de l'objet en question. Or, dans une forme analytique, le mouvement angulaire ne se trouve pas de façon aussi simple et c'est ce que l'on cherche à étudier.

2. Notation et introduction à la problématique

Avant de commencer l'exposé, il serait bien de se fixer une notation. Dans la plupart des équations plus bas, chaque terme sera expliqué pour ne pas porter à confusion. Cependant, afin de faciliter la lecture et la compréhension à l'avance, voici quelques conventions utilisées au cours de cet article. Tous les vecteurs (exemple : \vec{a}) de ce texte seront marqués d'une flèche et tous les quaternions seront notés en caractère gras. Une simple lettre minuscule (sans autre attribut) représentera un scalaire et une matrice sera habituellement écrite en majuscule. La norme (longueur) d'un vecteur \vec{a} sera notée $\|\vec{a}\|$. Pour représenter ce vecteur sous sa forme normalisée $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, la notation \hat{a} sera employée. Si ce dernier évolue en fonction du temps, alors il sera noté $\vec{a}(t)$ pour un temps t (idem pour les scalaires). Si ce vecteur est tridimensionnel, cela signifie que \vec{a} pourra être écrit sous la forme $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ou $[a_x, a_y, a_z]$. Comme $\vec{a}(t)$ évolue dans le temps, on pourra aussi calculer sa dérivée en fonction du temps, notée $\frac{d}{dt}\vec{a}(t) = \dot{\vec{a}}(t)$. Si nous avons un intervalle de temps ou de valeurs (vectorielles ou scalaires), on utilisera respectivement les notations Δt ou $\Delta \vec{a}$. Lorsque \vec{a} et \vec{b} sont des vecteurs de même dimension, alors on notera le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ou tout simplement $\vec{a}\vec{b}$. Si s et r sont des scalaires, alors leur multiplication utilisera la même notation. Il s'agit encore une fois de la même notation pour la multiplication d'un scalaire avec un vecteur. Si on veut effectuer une multiplication vectorielle, on utilisera

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur très utilisé sera $\vec{\omega}(t) = [\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)]$ qui représentera la vitesse angulaire instantanée $\|\omega(t)\|$ de l'objet rigide autour de l'axe de rotation unitaire $\hat{\omega}(t)$. Entre autre, nous nous intéresserons plus particulièrement à une vitesse

angulaire de forme affine : $\vec{\omega}(t) = [a_1 + b_1 \cdot t, a_2 + b_2 \cdot t, a_3 + b_3 \cdot t] = \vec{a} + \vec{b}t$. Un autre vecteur sera $\vec{\theta}(t) = \|\theta(t)\| \cdot \hat{n}(t)$ où $\hat{n}(t)$ est l'axe unitaire autour duquel on retrouve un angle de $\|\theta(t)\|$. La plupart du temps, cet axe, qui dépend du temps t , ne sera pas en relation directe avec l'axe de rotation de la vitesse angulaire instantanée, donc, de façon générale, $\vec{\theta}(t) \neq \vec{\omega}(t)$, cependant, au cours de cet exposé, nous devons développer des simplifications afin de mieux généraliser certaines équations. Afin de trouver la forme analytique de $\vec{\theta}(t)$, il faudra tenter de lui trouver plusieurs représentations pour ensuite tenter de trouver un lien entre le connu $\vec{\omega}(t)$ de l'inconnu $\vec{\theta}(t)$.

3. Représentation des rotations

Avant toute chose, il faut savoir que la rotation tridimensionnelle se comporte très différemment de celle bidimensionnelle. En effet, en 2D, la relation entre la vitesse angulaire et la position angulaire est simple : $\int_0^t \vec{\omega}(\tau) d\tau = \vec{\theta}(t)$. Cette dernière équation est due au fait que les angles peuvent se composer (s'additionner) et commuter. Or, en 3D, cette équation reste vraie tant et aussi longtemps que la composition angulaire commute. Malheureusement, en général, elle ne commute pas, c'est pourquoi il serait intéressant de trouver la relation entre la vitesse et la position. De plus, en deux dimensions, la direction de l'axe de rotation est unique et toute composition d'angles peut se résumer en un angle résultant autour de cet axe, tandis qu'en trois dimensions, il existe une infinité de ces directions et toute composition d'angles peut s'exprimer à l'aide de trois angles. Celles-ci sont souvent généralisées par trois axes de rotations perpendiculaires et tout dépendant de l'ordre dans laquelle on applique ces trois angles, la rotation résultante sera différente. C'est la non-commutativité.

Il existe trois outils répandus pour représenter les rotations en trois dimensions, compte-tenu de la non-commutativité : les angles d'Euler, les matrices de rotation et les quaternions.

3.1. Angles d'Euler

C'est peut-être de la méthode la plus visuelle pour représenter une rotation : le « pitch », le « roll » et le « yaw », trois angles représentant chacun l'un des axes principaux. Comme la non-commutativité intervient en trois dimensions, l'ordre dans lequel chacun de ces trois angles est appliqué est très important, car le deuxième angle sera dépendant du premier et le troisième sera dépendant des deux premiers. Cette représentation est souvent évitée pour sa complexité et ses lacunes. En effet, une rotation peut être représentée par maintes combinaisons, ce qui peut engendrer certains problèmes. Pour manipuler ces angles, on doit principalement les transformer en matrices de rotations et multiplier ces matrices, puis reconverter en angles.

3.2. Matrices de rotations

Contrairement aux angles d'Euler, les matrices de rotations ne nécessitent qu'un seul angle de rotation autour d'un axe représenté par un vecteur à trois dimensions.

Si l'on connaît notre axe de rotation (par exemple $\hat{u} = [u_x, u_y, u_z]$) et si l'on veut faire une rotation de θ autour de ce dernier, alors la matrice suivante sera utilisée :

$$R = \begin{bmatrix} u_x^2 + (1 - u_x^2) \cos \theta & u_x u_y (1 - \cos \theta) - u_z \sin \theta & u_x u_z (1 - \cos \theta) + u_y \sin \theta \\ u_x u_y (1 - \cos \theta) + u_z \sin \theta & u_y^2 + (1 - u_y^2) \cos \theta & u_y u_z (1 - \cos \theta) - u_x \sin \theta \\ u_x u_z (1 - \cos \theta) - u_y \sin \theta & u_y u_z (1 - \cos \theta) + u_x \sin \theta & u_z^2 + (1 - u_z^2) \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \hat{u} \hat{u}^T + (I - \hat{u} \hat{u}^T) \cos \theta + \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \sin \theta$$

Cette dernière matrice est aussi nommée la matrice des cosinus directionnels (*direction cosine matrix* en anglais) par plusieurs auteurs. En réalité, chacune des colonnes indique la direction dans laquelle chaque point a été transformé par rapport à tous les axes de rotation.

Pour composer plusieurs rotations, il suffit de multiplier les matrices les représentant. Ainsi, si on veut composer plusieurs rotations, représentées par les matrices R_a , R_b et R_c , sur un même vecteur \vec{v} , il suffit de multiplier toutes les matrices de rotation : $R_c \cdot R_b \cdot R_a = R_r$, où R_r est la matrice de rotation résultante telle que

$$(1) \quad \vec{v}' = R_r \cdot \vec{v}$$

Attention, l'ordre de multiplication est important, car, en effet, ni la composition des angles, ni la multiplication des matrices n'est commutative.

Remarquons qu'une rotation nulle est logiquement représentée par la matrice identité I et que peu importe la matrice de rotation R que l'on utilise, cette dernière sera toujours orthogonale, c'est-à-dire que $R \cdot R^t = I$.

3.3. Quaternions

Un quaternion est un élément à quatre composantes (quatre dimensions), mais qui représente des transformations en trois dimensions. La structure et l'algèbre des quaternions sont très similaires à la structure et l'algèbre des nombres complexes, c'est pourquoi on donne le nom de nombre hypercomplexe à ses représentants unitaires.

DÉFINITION 1. Soit \mathbf{q} un quaternion. Ce quaternion s'écrit sous la forme suivante

$$(2) \quad \mathbf{q} = q_0 + q_x \cdot \vec{i} + q_y \cdot \vec{j} + q_z \cdot \vec{k}$$

où q_0 , q_x , q_y et q_z sont des scalaires et tel que les identités suivantes sont respectées :

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = -1$$

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j}\vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k}\vec{i} = \vec{j}$$

On peut aussi écrire

$$(3) \quad \mathbf{q} = [q_0, \vec{v}]$$

où

$$(4) \quad \vec{v} = q_x \cdot \vec{i} + q_y \cdot \vec{j} + q_z \cdot \vec{k}$$

Le vecteur \vec{v} est aussi nommé la partie vectorielle de \mathbf{q} , tandis que q_0 est nommé la partie scalaire de ce dernier.

Voici un résumé des opérations fréquemment utilisées dans la manipulation des quaternions :

Opération	Équation	Commutatif ?
Addition	$\mathbf{q} + \mathbf{p} = (q_0 + p_0) + (q_x + p_x) \cdot \vec{i} + (q_y + p_y) \cdot \vec{j} + (q_z + p_z) \cdot \vec{k}$	Oui
Soustraction	$\mathbf{q} - \mathbf{p} = (q_0 - p_0) + (q_x - p_x) \cdot \vec{i} + (q_y - p_y) \cdot \vec{j} + (q_z - p_z) \cdot \vec{k}$	Oui
Multiplication Quaternion Scalaire	$\mathbf{q} \cdot s = [q_0 \cdot s, \vec{v} \cdot s]$	Oui
Multiplication Quaternion vecteur	$\mathbf{q} \cdot \vec{h} = [-\vec{v} \cdot \vec{h}, \vec{v} \cdot q_0 + \vec{v} \times \vec{h}]$	Non
Multiplication Interquaternion	$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = [q_0 \cdot p_0 - \vec{v}_q \cdot \vec{v}_p, q_0 \cdot \vec{v}_p + p_0 \cdot \vec{v}_q + \vec{v}_q \times \vec{v}_p]$	Non
Conjugué	$\mathbf{q}^* = [q_0, -\vec{v}]$ $= q_0 - q_x \cdot \vec{i} - q_y \cdot \vec{j} - q_z \cdot \vec{k}$	—
Norme	$\ \mathbf{q}\ = \sqrt{q_0^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$	—
Inverse	$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\ \mathbf{q}\ ^2}$	—

Tout comme les matrices de rotations, pour représenter une rotation à l'aide d'un quaternion, on doit avoir un vecteur tridimensionnel qui donne la direction de l'axe de rotation et on doit avoir un angle autour de cet axe. L'avantage, en comparaison avec les matrices, c'est qu'un quaternion ne contient que quatre composantes tandis que la matrice en nécessite neuf. Voici l'allure d'un quaternion servant à représenter une rotation de $\|\theta(t)\|$ autour d'un axe normalisé $\hat{u}(t)$:

$$(5) \quad \mathbf{q} = [q_0 = \cos\left(\frac{\|\theta(t)\|}{2}\right), v = \sin\left(\frac{\|\theta(t)\|}{2}\right) \cdot \hat{u}(t)]$$

Attention, tout quaternion de rotation se doit d'être unitaire. S'il ne l'est pas, il suffit de le normaliser en le divisant par sa norme. Ceci nous amène à en conclure que l'inverse d'un quaternion unitaire est en fait son propre conjugué.

De même qu'avec les matrices de rotation, on peut trouver un vecteur \vec{h}' , obtenu par la rotation (représentée par \mathbf{q}) de \vec{h} avec la formule suivante

$$(6) \quad \vec{h}' = \mathbf{q} \cdot \vec{h} \cdot \mathbf{q}^*$$

Si on veut effectuer plusieurs rotation \mathbf{q}_a , \mathbf{q}_b et \mathbf{q}_c sur un même vecteur \vec{h} , il suffit de multiplier tous les quaternions de rotation :

$$(7) \quad \mathbf{q}_c \cdot \mathbf{q}_b \cdot \mathbf{q}_a = \mathbf{q}_r$$

où \mathbf{q}_r est le quaternion de rotation résultant telle que

$$(8) \quad \vec{h}' = \mathbf{q}_r \cdot \vec{h} \cdot \mathbf{q}_r^*$$

Attention, comme déjà mentionné plus haut, l'ordre de la composition (multiplication) des quaternions de rotation est importante, car ni la composition d'angles et ni la multiplication de quaternions n'est commutative.

4. Dérivée des rotations 3D

Afin d'introduire l'aspect des vitesses angulaires, il faut tout d'abord s'intéresser à la dérivée de chacune des représentations par rapport au temps. Voici donc, de façon résumée, les dérivées des trois représentations de rotations introduites précédemment.

4.1. Angles d'Euler

$$(9) \quad \vec{\omega}_x = \dot{\Theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \cos \Theta$$

$$(10) \quad \vec{\omega}_y = \dot{\Theta} \sin \psi - \dot{\phi} \cos \psi \sin \Theta$$

$$(11) \quad \vec{\omega}_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \Theta$$

4.2. Matrices de rotation

$$(12) \quad \frac{d}{dt} R_r(t) = \Omega(t) \cdot R_r(t)$$

où

$$(13) \quad \Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix}$$

4.3. Quaternions

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{q}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_\omega(t) \mathbf{q}(t)$$

où

$$(15) \quad \mathbf{q}_\omega(t) = [0, \vec{\omega}(t)]$$

5. Pistes entreprises

Cette section est le cœur de notre recherche. Elle sert à trouver un lien entre la vitesse angulaire instantanée et la position angulaire. Toutes les pistes développées sont longues et exhaustives, alors elles vous seront résumées.

5.1. Pistes 1 et 2 : Mouvement gyroscopique

L'idée des deux premières pistes a été inspirée par Davailus [1], Farrell et Barth [2] : celle d'utiliser la forme exponentielle intégrale d'un quaternion :

$$(16) \quad \mathbf{q}(t_1) = e^{\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \mathbf{q}_\omega(t) dt} \cdot \mathbf{q}(t_0)$$

Cependant, cette formule n'est valide que si l'axe de rotation est fixe, or notre axe change de direction en fonction du temps. D'où l'idée de Farrell et Barth qui est de changer presque instantanément le système d'axes de telle sorte que notre axe de rotation semble rester fixe et ainsi, cette formule deviendrait valable. Malheureusement, nous voulons une forme analytique et non approximative, tel que proposé par ces auteurs. C'est pourquoi, pour chaque itération de temps, il faudrait reconvertir les coordonnées de notre nouveau système d'axe dans un système global et cela alourdirait les calculs et cela ne fonctionnerait que pour de très petits intervalles. C'est la raison principale pour laquelle ces deux pistes ont été mises de côté.

5.2. Piste 3 : Angles d'Euler

Cette troisième piste a un but simple, celui d'isoler les dérivées des angles d'Euler et de résoudre le système d'équations obtenu :

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega_x(t) + \omega_y(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \tan \Theta(t) + \omega_z(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \tan \Theta(t) \\ \dot{\Theta} &= \omega_y(t) \cdot \cos \psi(t) - \omega_z(t) \cdot \sin \psi(t) \\ \dot{\phi} &= \omega_y(t) \cdot \frac{\sin \psi(t)}{\cos \Theta(t)} + \omega_z(t) \cdot \frac{\cos \psi(t)}{\cos \Theta(t)} \end{aligned}$$

Malheureusement, résoudre ce système d'équations différentielles semble une tâche plutôt ardue et non intuitive, même numériquement.

5.3. Pistes 4, 5 et 6 : Interpolation et cas simples

Ces pistes ont été créées pour nous-mêmes. Leur but premier est de nous aider à développer notre intuition en commençant par étudier les cas simples du phénomène, puis de les compliquer peu à peu.

Premièrement, nous avons supposé que l'axe de rotation décrit un mouvement d'interpolation autour d'une sphère unitaire et nous avons obtenu :

$$(18) \quad \mathbf{q}_\omega(t) = \|\dot{\theta}(t)\| \cdot \mathbf{p}(t) + \sin \|\theta(t)\| \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) + [1 - \cos \|\theta(t)\|] \cdot \hat{e}_3$$

où $\hat{e}_3 = [0, 0, 1]$ et où $\mathbf{p}(t)$ est le quaternion d'interpolation décrit par :

$$(19) \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{\phi}{\tau \cdot \sin \phi} \left[0, \cos(\phi \frac{t}{\tau}) \cos(\frac{\phi}{2}) - \cos(\phi - \phi \frac{t}{\tau}), -\cos(\phi \frac{t}{\tau}) \sin(\frac{t}{\tau}), 0 \right]$$

où τ est le temps total et où ϕ est l'angle entre la position initiale et finale de l'axe de rotation.

Nous n'avons pas réussi à trouver une forme convenable pour la position angulaire en supposant que la vitesse angulaire était affine.

Après ces calculs, nous avons étudié les cas simples quand l'axe de rotation est constant et quand la vitesse angulaire a une direction fixe, mais avec une norme affine et nous avons obtenu ce résultat :

$$(20) \quad \vec{\omega}(t) = \|\dot{\theta}(t)\| \cdot \hat{\omega}(t) + \sin \|\theta(t)\| \cdot \vec{\omega}(t) + [1 - \cos \|\theta(t)\|] \cdot \vec{\omega}(t) \times \vec{\omega}(t)$$

Malheureusement, toutes ces pistes ont pour hypothèse que l'axe de rotation reste immobile, ce qui cause problème, d'où le développement de la piste suivante.

5.4. Piste 7 : Axe de rotation déterminé par l'inconnu

Comme l'indique le titre de la piste, nous avons décidé de nous attaquer au cas où l'axe de rotation n'est pas fixe, c'est-à-dire que $\hat{u} = \frac{\vec{\theta}}{\|\vec{\theta}\|} \neq \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|}$ comme le suggèrent [3, 4]. Après de longs calculs, nous avons obtenu :

$$(21) \quad \vec{\theta}(t) = \vec{\omega}(t) - \frac{1}{2}(\vec{\theta}(t) \times \vec{\omega}(t)) + \frac{1}{\|\vec{\theta}(t)\|^2} \left(1 - \frac{\|\theta(t)\|}{2} \cot \frac{\|\theta(t)\|}{2} \right) \vec{\theta}(t) \times (\vec{\theta}(t) \times \vec{\omega}(t))$$

Cette équation est en fait un système de trois équations différentielles, qui, après plusieurs essais numériques, ne semble pas se résoudre si facilement.

6. Conclusion

Ces pistes n'ont peut-être pas été fructueuses en terme de résultats escomptés, mais elles nous ont fourni de nombreuses intuitions plus utiles les unes que les autres afin d'éventuellement retravailler sur ce dossier avec un bagage expérimental plus fourni.

Références

- [1] George P. Davailus. *The application of quaternion algebra to gyroscopic motion, navigation and guidance*, 2005.
- [2] Jay Farrell and Matthew Barth. *The global positioning system and inertial navigation*. McGraw Hill, 1999.
- [3] John E. Bortz. *A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation*, 1971.
- [4] Malcolm D. Shuster. *The kinematic equation for the rotation vector*, 1993.

NICOLAS BUREAU, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: `nicolas.bureau@usherbrooke.ca`

VISUALISATION DE FONCTIONS GÉNÉRANT UN POINT DE SELLE MULTIPLE DANS \mathbb{R}^n

RÉMI GAGNÉ

RÉSUMÉ.

Le présent rapport est la conclusion d'un project de visualisation de fonctions allant de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et générant des points de selle multiple. Le choix des fonctions étudiées est motivé par une famille de fonctions discutée dans [2]; elles se trouvent à être une généralisation de cette famille. Le logiciel utilisé est Mathematica 7.

On y présente en premier lieu, aussi assisté par Mathematica, le calcul du degré topologique des points de selle, qui sont des points critiques dégénérés. Ensuite viennent plusieurs images, des cas $n = 2$ à $n = 4$, visant à montrer certaines de leur caractéristiques.

Ce travail se veut un d'expérimentation; par conséquent, aucun résultat original de mathématiques fondamentales n'y est démontré.

0. Rappels

Quelques notions de calcul vectoriel ainsi qu'une connaissance minimale de la projection stéréographique et des quaternions seront nécessaires. Il est donc proposé de les introduire avant de commencer.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction réelle à n variables.

Une *courbe de niveau* d'une fonction est l'ensemble des points du domaine pour lesquels la fonction vaut une certaine valeur fixée.

Le *gradient* de f , noté ∇f , est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n donnée par

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n} \right),$$

c'est le vecteur des dérivées partielles de f . On rappelle qu'une dérivée partielle par rapport à une variable se fait en considérant toutes les autres variables comme des constantes et en dérivant normalement par rapport à la variable de dérivation.

Ce travail a été effectué au cours de la session d'hiver 2009 à l'Université de Sherbrooke et a été supervisé par les professeurs Tomasz Kaczynski et Virginie Charette dans le cadre d'un financement par le FQRNT.

Notons que le gradient d'une fonction indique la direction dans laquelle on doit se déplacer dans le domaine de la fonction pour que cette dernière augmente le plus rapidement possible. Aussi, le gradient en un point du domaine est perpendiculaire à la courbe de niveau passant par ce point.

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_m)$ une fonction vectorielle réelle à n variables avec m composantes où chaque y_i est fonction des x_i . Notons que le gradient d'une fonction réelle à n variables est une fonction vectorielle réelle de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

La *matrice jacobienne* de F , notée J_F , est donnée par

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\delta y_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta y_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta y_m}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta y_m}{\delta x_n} \end{bmatrix},$$

c'est la matrice des dérivées (partielles) premières de F . Elle est fonction des x_i .

Le *jacobien* de F est le déterminant de sa matrice jacobienne lorsque cette dernière est une matrice carrée ce qui est le cas lorsque f est le gradient d'une fonction. Il est aussi fonction des x_i .

La *matrice hessienne* de f , notée H_f , est donnée par

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_2 \delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_1} & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n \delta x_2} & \cdots & \frac{\delta^2 f}{\delta x_n^2} \end{bmatrix},$$

c'est la matrice des dérivées (partielles) secondes de f . Elle est fonction des x_i . Notons que cette matrice est la matrice jacobienne du gradient de f .

Le *hessien* de f est le déterminant de sa matrice hessienne. Il est aussi fonction des x_i .

Pour plus d'information, un manuel de calcul vectoriel comme, par exemple, [1] peut-être consulté.

La *projection stéréographique* consiste à prendre une sphère de dimension n (ensemble des points de \mathbb{R}^{n+1} équidistants à un centre fixé), à lui enlever un point et à faire correspondre chacun des points restants à un point de \mathbb{R}^n . Cette correspondance est réversible.

On fait correspondre à un point de la sphère le point de l'espace euclidien qui est l'intersection avec la droite contenant le point en question et le point enlevé, qui est appelé le point de projection. On doit avoir que l'espace euclidien sur lequel on projette la sphère est, à translation près, tangent au point de projection et ne contienne pas ce dernier.

Pour plus d'information, voir [5].

L'algèbre des *quaternions* est une extension des nombres complexes. Un quaternion est de la forme

$$x + yi + zj + wk$$

où x est la composante réelle et y, z et w sont les composantes imaginaires des axes imaginaires i, j et k , respectivement. Les calculs dans les quaternions sont régis par les relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

donnant les relations $ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$ montrant, du coup, que les quaternions ne forment pas une algèbre commutative.

Pour plus d'information, voir [4].

1. Introduction

Dans [2], il est en partie question de la famille de fonctions

$$f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } f_k(x, y) = \Re((x + iy)^{k+1}), k \in \mathbb{N}^*,$$

où \Re représente la partie réelle, qui a la caractéristique de générer un point de selle de multiplicité k à l'origine. L'image suivante, donnant le graphe des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 autour de l'origine, en témoigne (on fait appel, pour l'instant, au sens intuitif du lecteur d'un point de selle).

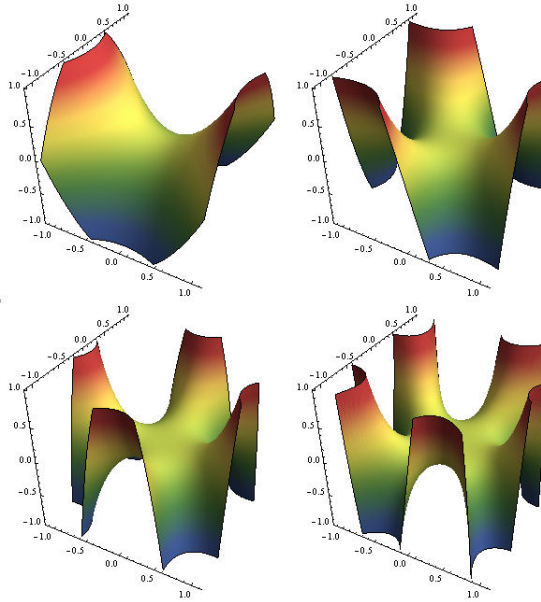


FIGURE 1. Graphe des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 autour de l'origine

On s'intéresse en fait au degré topologique, appelé aussi degré de Brauer [3] que nous appelons ici tout court le degré, de ces points de selle multiple. Précisons ici ce qu'il en est.

Définition 1 : Soient une fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec D borné et F continue sur \bar{D} , et un point $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $p \notin F(\partial D)$ et $J_F(x) \neq 0$ pour tout $x \in F^{-1}(p)$, alors le *degré de F au point p relativement à D* , noté $d(F, D, p)$, est

donné par

$$(1) \quad d(F, D, p) = \sum_{x \in F^{-1}(p)} \text{signe } J_F(x)$$

où $J_F(x)$ est le jacobien de F évalué en x [3].

Il sera discuté plus loin de ce qui peut être fait lorsque le jacobien est nul pour au moins un des points de $F^{-1}(p)$.

Ici, il est question de la famille $\{F_k\}$ avec $F_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ étant le gradient de f_k . On prend $p = 0$ et, de manière un peu arbitraire, $D = B_1^2(0) := B^2$, la boule ouverte de rayon 1 centrée à l'origine, dans \mathbb{R}^2 . En fait, n'importe quel ensemble borné D contenant l'origine, mais pas dans sa frontière, serait équivalent puisqu'on a pour tout k , que $F^{-1}(p) = \{0\}$ et, par le même fait, que $p \notin F(\delta D)$. Ignorons momentanément la condition relative au jacobien.

Voici les champs de vecteurs représentés par F_1, F_2, F_3 et F_4 autour de B^2 avec S^1 , comme frontière de B^2 , et l'origine, comme seul point d'équilibre du système d'équations différentielles $\left(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}\right) = F_k$, en évidence. On parle d'un tel système car, en considérant que le gradient évalué en un point donne la direction d'augmentation la plus rapide de la fonction en ce point, sa solution donne la trajectoire, sur le domaine, que suivrait une particule déposée sur le graphe de la fonction et se déplaçant toujours dans la direction du gradient. La variable t peut être vue comme le temps et la norme du gradient, en tant que vecteur, est gage de la rapidité du déplacement.

Dans le cas de fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , on peut voir ce déplacement comme celui d'une particule soumise à une anti-gravité. Un point d'équilibre représente donc un endroit où il n'y a aucun déplacement pour une particule s'y trouvant, comme les points de celles de l'image 1. Par rapport à un de ces points de selle, on peut identifier des lieux pour lesquels une particule y étant déposée se rend au point de selle lors d'une progression ou d'une régression infinie dans le temps. Ces lieux seront appelés ravins et crêtes, respectivement.

Définition 2 : Un *point critique* d'une fonction est un point où s'annule le gradient ; il est *dégénéré* si le hessien s'y annule aussi.

En vertu de la définition ci-haute, il s'ensuit que $F_k^{-1}(0)$, l'ensemble sur lequel la sommation pour calculer $d(F_k, B^2, 0)$ doit être effectuée, se trouve à être l'ensemble des points critiques de f_k . Et comme le jacobien de F_k est nul autre que le hessien de f_k , le calcul du degré en question ne peut se faire directement que si tous les points critiques de f_k sont non-dégénérés. Or, et là est tout l'intérêt, ce n'est le cas que si $k = 1$.

La théorie dit que le degré $d(F, D, p)$, est invariant à une perturbation assez petite de F [3]. Une stratégie est alors d'ajouter un facteur linéaire $-\varepsilon x$, avec $\varepsilon > 0$, aux fonctions $\{f_k\}$ ce qui ajoutera une perturbation $(-\varepsilon, 0)$ aux champs de vecteurs donnés par $\{F_k\}$. Notons $\{g_k\}$ et $\{G_k\}$ les familles ainsi obtenues, respectivement.

On espère ensuite que pour tout k , les points critiques de g_k soient non-dégénérés de sorte qu'on puisse calculer $d(G_k, B^2, 0)$ directement à l'aide de la formule (1). Enfin, on aurait que $d(F_k, B^2, 0) = d(G_k, B^2, 0)$. Il est connu que la

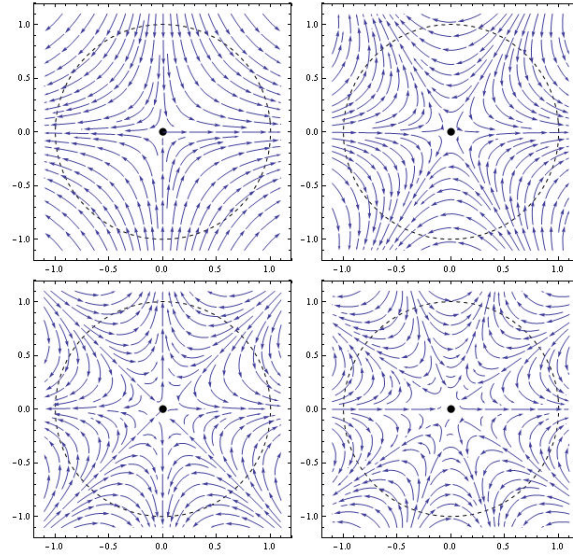


FIGURE 2. Champ de vecteurs des fonctions F_1 , F_2 , F_3 et F_4 autour de l'origine

mesure des valeurs de ε donnant une fonction avec des points critiques dégénérés est nulle.

Pour calculer $d(F_k, B^2, 0)$, [2] utilise l'analyse complexe, un résultat connu sur le degré de fonctions holomorphes $\bar{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ et le théorème de multiplication de la théorie du degré pour arriver au résultat, qui est $-k$. On utilise ce résultat pour donner une définition d'un point de selle.

Définition 3 : Un *point de selle* d'une fonction est un point critique qui n'est pas un extrémum ; son hessien est négatif. Sa *multiplicité* est égale à la valeur absolue de son degré.

Lorsque $k = 1$ l'origine est un point de selle de multiplicité 1, ou encore un point de selle simple. Pour toutes les autres valeurs de k , l'origine est un point de selle multiple, de multiplicité k .

On vise dans ce document à obtenir le degré de points critiques dégénérés de fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en utilisant la méthode de la perturbation du champ de vecteurs. On commencera par confirmer le résultat dans le cas $n = 2$ à l'aide de cette méthode et ensuite utiliser ce résultat pour les cas où $n > 2$. On compte exploiter la puissance du calcul symbolique de Mathematica pour y arriver.

Selon le degré obtenu, il pourra être conclu que ces points critiques dégénérés sont des points de selle multiple.

Il y aura aussi, bien sûr, moult figures pour permettre de visualiser des caractéristiques de certaines de ces fonctions allant de \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R} .

2. Perturbation des fonctions $\{f_k\}$

Commençons par donner les fonctions f_1 à f_4 , leur gradient, F_1 à F_4 , les matrices jacobiennes des gradients, qu'on notera DF_1 à DF_4 , leurs points critiques, $F_1^{-1}(0)$ à $F_4^{-1}(0)$ et les jacobiens des gradients évalués à ces points critiques.

TABLE 1. f_k et F_k pour $1 \leq k \leq 4$

k	f_k	F_k
1	$x^2 - y^2$	$(2x, -2y)$
2	$x^3 - 3xy^2$	$(3x^2 - 3y^2, -6xy)$
3	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$	$(4x^3 - 12xy^2, -12x^2y + 4y^3)$
4	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$	$(5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4, -20x^3y + 20xy^3)$

TABLE 2. DF_k , $F_k^{-1}(0)$ et $J_k(F_k^{-1}(0))$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	DF_k	$F_k^{-1}(0)$	$J_k(F_k^{-1}(0))$
1	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\{(0, 0)\}$	$\{-4\}$
2	$\begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$	$\{(0, 0)\}$	$\{0\}$
3	$\begin{pmatrix} 12x^2 - 12y^2 & -24xy \\ -24xy & -12x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$	$\{(0, 0)\}$	$\{0\}$
4	$\begin{pmatrix} 20x^3 - 60xy^2 & -60x^2y + 20y^3 \\ -60x^2y + 20y^3 & -20x^3 + 60xy^2 \end{pmatrix}$	$\{(0, 0)\}$	$\{0\}$

Ensuite, perturbons-les en leur ajoutant la quantité $-\varepsilon x$, avec $\varepsilon > 0$ et notons ces nouvelles fonctions $\{g_k\}$ et leur gradients $\{G_k\}$. On a alors que $g_k = f_k - \varepsilon x$, $G_k = F_k - (\varepsilon, 0)$ et $DG_k = DF_k$. Voici les points critiques qui sont réels lorsque $\varepsilon > 0$ (k points critiques sur k^2 au total), avec leur jacobien, pour ces nouvelles fonctions.

TABLE 3. $G_k^{-1}(0)$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	$G_k^{-1}(0)$
1	$\{(\frac{\varepsilon}{2}, 0)\}$
2	$\{(\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, 0), (-\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, 0)\}$
3	$\{(\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}}, 0), (-\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}}), (-\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{4}})\}$
4	$\{(\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{5}}, 0), (0, \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{5}}), (-\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{5}}, 0), (0, -\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{5}})\}$

TABLE 4. $J_k(G_k^{-1}(0))$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	$J_k(G_k^{-1}(0))$
1	$\{-2^2\}$
2	$\{-(2\sqrt{3\varepsilon})^2, -(2\sqrt{3\varepsilon})^2\}$
3	$\left\{-\left(3\sqrt[3]{4\varepsilon^2}\right)^2, -\left(3\sqrt[3]{4\varepsilon^2}\right)^2, -\left(3\sqrt[3]{4\varepsilon^2}\right)^2\right\}$
4	$\left\{-\left(4\sqrt[4]{5\varepsilon^3}\right)^2, -\left(4\sqrt[4]{5\varepsilon^3}\right)^2, -\left(4\sqrt[4]{5\varepsilon^3}\right)^2 - \left(4\sqrt[4]{5\varepsilon^3}\right)^2\right\}$

On voit des deux derniers tableaux que pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction g_k admet k points critiques non-dégénérés, les jacobiens ne s'annulant que si $\varepsilon = 0$. Dans ce cas, les k points critiques deviennent un seul point critique multiple, à savoir l'origine, ce qui nous redonne la fonction f_k .

On remarque aussi que tous les jacobiens sont négatifs et donc que le degré de chacun de ces points est -1. Et comme il y a k points critiques, on obtient bel et bien que

$$d(F_k, B^2, 0) = d(G_k, B^2, 0) = \sum_{x \in G_k^{-1}(0)} \text{signe } J_{G_k}(x) = k \cdot -1 = -k.$$

On note enfin que tous ces points sont des points de selle simple car leur hessien est négatif et qu'il s'agit de points critiques de fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Fixons maintenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et regardons, aux figures 3 et 4, l'équivalent des figures 1 et 2 mais pour les fonctions g_1 à g_4 et G_1 à G_4 ainsi obtenues.

La figure 4 nous permet de bien voir les k points critiques et de constater d'une autre manière que chacun de ces points est un point de selle simple. En effet, il y a, émanant de chaque point, exactement 2 ravins et crêtes contrairement à $k+1$ pour les fonctions F_1 à F_4 , comme on peut le voir à la figure 2.

La figure 4 est aussi très intéressante du fait que les points critiques des fonctions perturbées semblent tous se situer à égale distance de l'origine. De plus, ils semblent être dispersés sur un cercle de rayon égal à cette distance à la manière dont les racines k^e complexes de l'unité le sont sur S^1 .

Le tableau 3 nous confirme ceci pour $k \leq 4$. En effet, on peut écrire que

$$G_k^{-1}(0) = \left\{ \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k+1}} \left(\Re \left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{k}} \right), \Im \left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{k}} \right) \right), \alpha = 0, 1, \dots, k-1 \right\}$$

où on voit que la distance entre chaque point critique et l'origine est $\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$.

Aussi, toujours pour $k \leq 4$, on peut tirer du tableau des jacobiens des points critiques des $\{g_k\}$ qu'ils valent tous $-\left(k\sqrt[k]{(k+1)\varepsilon^{k-1}}\right)^2$. De plus, les deux valeurs propres des matrices hessiennes de tous ces points sont $\pm k\sqrt[k]{(k+1)\varepsilon^{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pm\infty$.

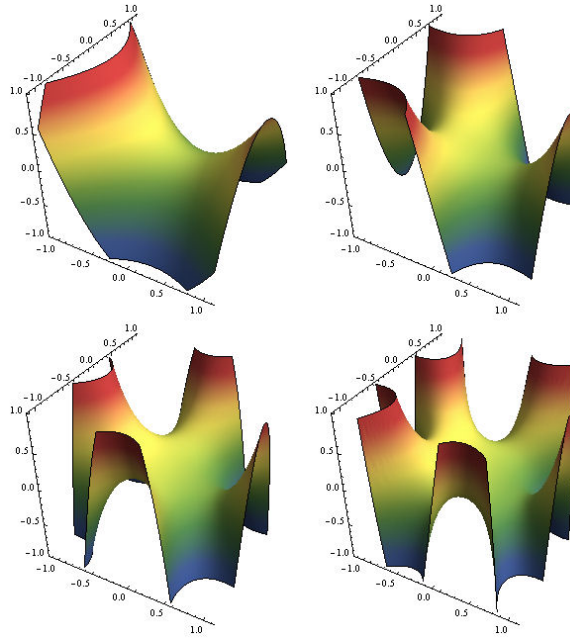


FIGURE 3. Graphe des fonctions g_1 , g_2 , g_3 et g_4 autour de l'origine

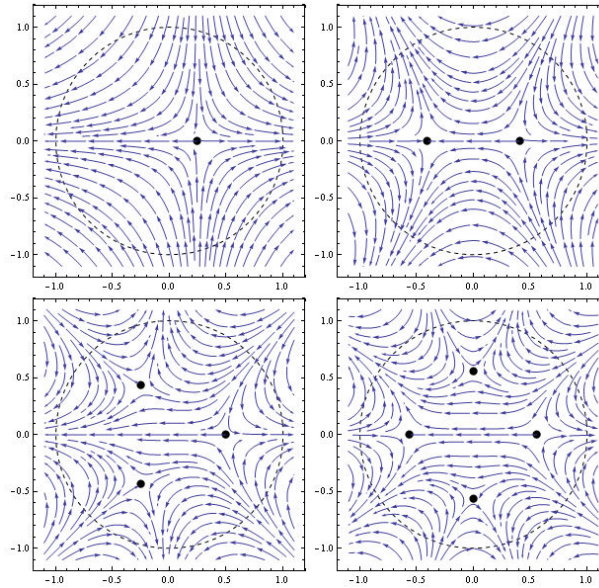


FIGURE 4. Champ de vecteurs des fonctions G_1 , G_2 , G_3 et G_4 autour de l'origine

Il est conjecturé que les deux derniers paragraphes sont valides pour toute valeur entière et strictement positive de k . Ils ont, du moins, été vérifiés pour $k \leq 6$ avec Mathematica. On tiendra ces conjectures comme vraies dans le reste de ce document.

3. Généralisation des fonctions $\{f_k\}$

Nous allons maintenant définir des familles de fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec $n \geq 2$ à partir de la famille $\{f_k\}$. Cette famille de familles sera notée $\{f_{n,k}\}$, leurs gradients $\{F_{n,k}\}$ et leurs matrices hessiennes $\{DF_{n,k}\}$. On fait de même pour les fonctions $\{g_k\}$.

Les variables prises dans \mathbb{R}^n sont notées x_1, x_2, \dots, x_n et les nouvelles fonctions sont définies par

$$f_{2,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto f_k(x_1, x_2)$$

$$f_{n,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_{2,k}(x_1, x_2) + \sum_{i=3}^n \lambda_i x_i^2, \text{ avec } \lambda_i \in \{-1, 1\} \text{ et } n \geq 3$$

$$g_{2,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto g_k(x_1, x_2)$$

$$\text{et } g_{n,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto g_{2,k}(x_1, x_2) + \sum_{i=3}^n \lambda_i x_i^2, \text{ avec } \lambda_i \in \{-1, 1\} \text{ et } n \geq 3.$$

Ces fonctions se trouvent, si on veut, à plonger dans \mathbb{R}^n l'effet que les fonctions $\{f_{2,k}\}$ ont sur \mathbb{R}^2 et à introduire les nouvelles variables, de x_3 à x_n , sous une forme "muette". Ce terme est utilisé pour imager le fait que, contrairement à x_1 et x_2 , leur participation ne change pas, peu importe la valeur de k .

En effet, leur puissance est toujours fixée à 2 tandis que celles de x_1 et x_2 varient de sorte que leur somme, dans les termes du polynôme $f_{n,k}$ qui ne sont composés que d'eux, vaut $k+1$.

De ceci, on tire que la famille $\{f_{n,k}\}$ n'est homogène, de degré $k+1$, que pour $n=2$; c'est-à-dire que pour tout k et tout $c \in \mathbb{R}$, on a que

$$f_{2,k}(cx_1, cx_2) = c^{k+1} f_{2,k}(x_1, x_2).$$

On peut d'ailleurs s'en convaincre facilement en regardant le tableau 1.

Dans un autre ordre d'idées, l'introduction des nouvelles variables en une somme où elles sont de degré 2, séparées les unes des autres et ne se mélangeant pas à x_1 ni à x_2 a comme conséquence qu'on obtient

$$F_{n,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ avec } F_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = \left(\underbrace{F_{2,k}(x_1, x_2)}_{2 \text{ fonctions}}, \overbrace{\{2\lambda_i x_i, i = 3, 4, \dots, n\}}^{n \text{ fonctions}} \right)$$

et

$$DF_{n,k} \in M_n(\mathbb{R}) \text{ avec}$$

$$DF_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} DF_{2,k} \in M_2(\mathbb{R}) & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 2\lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 2\lambda_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 2\lambda_n \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'établir rapidement certains faits sur ces nouvelles fonctions et leurs perturbations, $\{g_{n,k}\}$. Ces faits sont tirés directement de faits sur $\{f_{2,k}\}$ et $\{g_{2,k}\}$.

Avant de regarder en détails les faits en question, donnons, à titre d'exemple, $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$, $F_{4,1}$ à $F_{4,4}$ et $DF_{4,1}$ à $DF_{4,4}$, où on prend (x, y, z, w) comme étant (x_1, x_2, x_3, x_4) et on pose $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

TABLE 5. $f_{4,k}$ et $F_{4,k}$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	$f_{4,k}$	$F_{4,k}$
1	$x^2 - y^2 + z^2 + w^2$	$(2x, -2y, 2z, 2w)$
2	$x^3 - 3xy^2 + z^2 + w^2$	$(3x^2 - 3y^2, -6xy, 2z, 2w)$
3	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + z^2 + w^2$	$(4x^3 - 12xy^2, -12x^2y + 4y^3, 2z, 2w)$
4	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + z^2 + w^2$	$(5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4, -20x^3y + 20xy^3, 2z, 2w)$

TABLE 6. $DF_{4,k}$ pour $1 \leq k \leq 4$

k	$DF_{4,k}$
1	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6x & -6y & 0 & 0 \\ -6y & -6x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 12x^2 - 12y^2 & -24xy & 0 & 0 \\ -24xy & -12x^2 + 12y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 20x^3 - 60xy^2 & -60x^2y + 20y^3 & 0 & 0 \\ -60x^2y + 20y^3 & -20x^3 + 60xy^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On peut facilement voir, à partir des tableaux 5 et 6, à quoi ressemblent les fonctions $\{g_{n,k}\}$, leurs gradients $\{G_{n,k}\}$ et leurs matrices hessiennes $\{DG_{n,k}\}$, pour $k \leq 4$. Il suffit pour ceci de noter que, tout comme à la section précédente,

$$g_{n,k} = f_{n,k} - \varepsilon x, G_{n,k} = F_{n,k} - (\underbrace{\varepsilon, 0, 0, \dots, 0}_{n-1 \text{ fois}}) \text{ et } DG_{n,k} = DF_{n,k}.$$

Voici maintenant ce qui peut être déduit. On a, pour tout $n \geq 2$, que les gradients $\{F_{n,k}\}$ ont tous les mêmes deux premières composantes avec toutes les autres de la forme $2\lambda_i x_i$, où $3 \leq i \leq n$. Il en est de même pour les $\{G_{n,k}\}$.

On en déduit que, pour tout $n \geq 2$, les points critiques ont tous, pour une même famille, les mêmes deux premières composantes avec toutes les autres valant 0. On peut exprimer ceci en écrivant

$$F_{n,k}^{-1}(0) = \left\{ \overbrace{(x, 0, 0, \dots, 0)}^{n \text{ composantes}}, x \in F_{2,k}^{-1}(0) \right\}$$

$n-2 \text{ fois}$

$$\text{et } G_{n,k}^{-1}(0) = \left\{ (x, 0, 0, \dots, 0), x \in G_{2,k}^{-1}(0) \right\}.$$

Aussi, les jacobiens des gradients aux points critiques se trouvent à n'être que le produit de termes de la forme $2\lambda_i$, où $3 \leq i \leq n$, avec les jacobiens des points critiques des fonctions $\{f_{2,k}\}$ ou $\{g_{2,k}\}$, selon le cas. On peut donc écrire

$$J_{n,k} \left(F_{n,k}^{-1}(0) \right) = J_{2,k} \left(F_{2,k}^{-1}(0) \right) \cdot 2^{n-2} \prod_{i=3}^n \lambda_i$$

$$\text{et } J_{n,k} \left(G_{n,k}^{-1}(0) \right) = J_{2,k} \left(G_{2,k}^{-1}(0) \right) \cdot 2^{n-2} \prod_{i=3}^n \lambda_i.$$

Dans le cas des fonctions $\{f_{n,k}\}$, ceci nous donne, comme avec les fonctions $\{f_{2,k}\}$, que le seul point critique est l'origine et qu'il est dégénéré pour tout $k > 1$. On cherche alors à calculer le degré pour ce point critique, qu'on note $d(F_{n,k}, B^n, 0)$, où B^n est la boule ouverte de rayon 1 centrée à l'origine, dans \mathbb{R}^n .

Dans le cas des fonctions $\{g_{n,k}\}$, ceci nous donne, comme avec les fonctions $\{g_{2,k}\}$, qu'il y a k points critiques situés dans le plan x_1x_2 , à égale distance de l'origine et disposés de manière uniforme autour d'un cercle. On peut, en effet, écrire

$$G_{n,k}^{-1}(0) = \left\{ \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k+1}} \left(\Re \left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{k}} \right), \Im \left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{k}} \right), 0, 0, \dots, 0 \right), \alpha = 0, 1, \dots, k-1 \right\}$$

où on voit que tous ces points sont toujours à une distance de $\sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{k+1}}$ de l'origine.

Quant à elles, les valeurs propres de tous les hessiens $\{DG_{n,k}\}$ évalués aux points critiques sont $\left\{ \pm k \sqrt[k]{(k+1)\varepsilon^{k-1}}, 2\lambda_3, 2\lambda_4, \dots, 2\lambda_n \right\}$ et donc les jacobiens des fonctions $\{G_{n,k}\}$ valent tous $-\left(k \sqrt[k]{(k+1)\varepsilon^{k-1}} \right)^2 \cdot 2^{n-2} \prod_{i=3}^n \lambda_i$.

Comme le produit $\prod_{i=3}^n \lambda_i$ vaut ± 1 , il s'ensuit que les signes des jacobiens valent ∓ 1 et donc que

$$d(F_{n,k}, B^n, 0) = d(G_{n,k}, B^n, 0) = \sum_{x \in G_{n,k}^{-1}(0)} \text{signe } J_{G_{n,k}}(x) = k \cdot \mp 1 = \mp k.$$

Et comme les valeurs propres ne sont pas toutes de même signe, tous ces points critiques sont des points de selle simple, ce qui nous permet de conclure que l'origine est un point de selle multiple ; en fait, de multiplicité k .

4. Visualisation de fonctions $\{f_{n,k}\}$

Regardons maintenant à quoi ressemblent ces fonctions autour de leur point critique dégénéré, l'origine. Puisque la visualisation des cas où $n > 2$ ne se fait pas directement, il faudra utiliser d'autres moyens pour essayer de saisir ce qui se passe.

On s'intéressera en particulier aux cas $n = 3$ et $n = 4$; pour ceci on fera appel à des courbes de niveau (cas $n = 3$) et des projections stéréographiques (cas $n = 3$ et $n = 4$). On visualisera aussi le cas $n = 2$ pour justifier, en quelques sorte, les méthodes de visualisation utilisées.

4.1. Visualisation à l'aide de courbes de niveau

Lorsqu'il s'agit de fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, il y a trois types de point critique non-dégénéré : minimum, maximum ou point de selle simple. Contrairement à un extremum, un point de selle simple a la particularité d'être l'intersection de courbes de niveau et il en est de même pour un point de selle multiple. La figure 5 montre cette propriété.

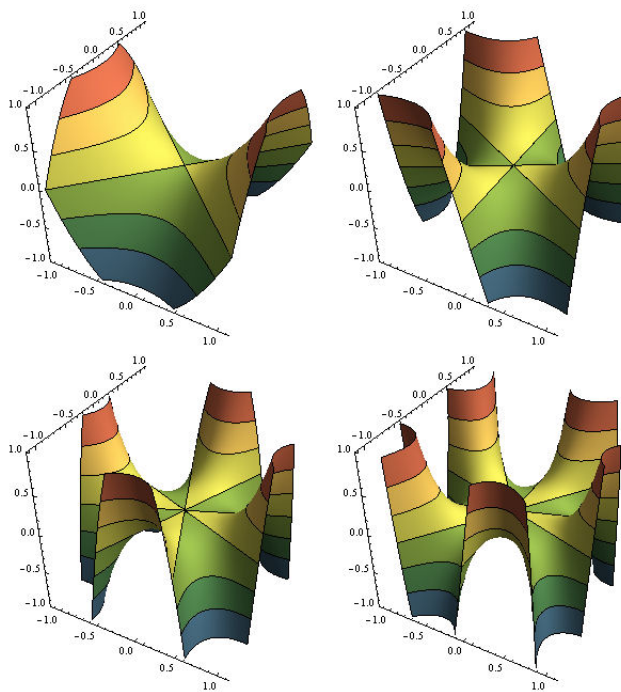


FIGURE 5. Graphe des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$, avec courbes de niveau, autour de l'origine

Mais comme les courbes de niveau sont des sous-ensembles du domaine, qui est ici \mathbb{R}^2 , il n'est pas nécessaire de les visualiser en 3D ; le 2D faisant parfaitement l'affaire, à la manière d'une carte topographique.

On a donc en 2D, à la figure 6, l'essentiel de l'information de la figure 5, en plus de S^1 et des crêtes et des ravins des champs de gradients correspondants,

en pointillé. On peut, à l'aide de la figure 2, corroborer l'emplacement de ces dernières.

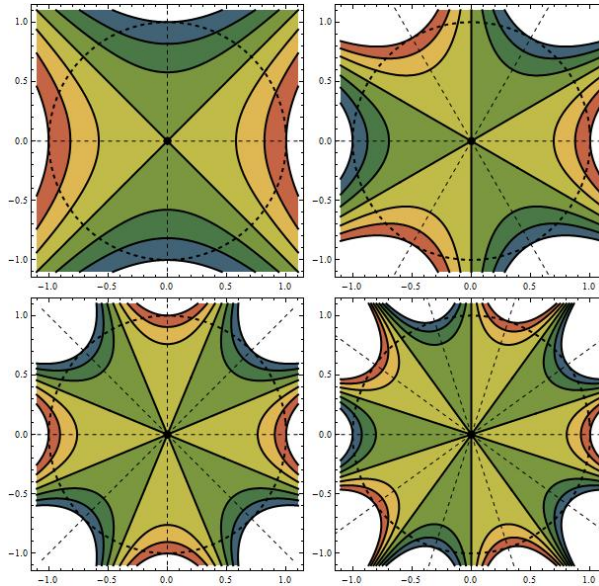


FIGURE 6. Courbes de niveau des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$ autour de l'origine

Il n'est pas possible de visualiser le graphe des fonctions $\{f_{3,k}\}$, mais puisque leur domaine est \mathbb{R}^3 , il est possible de visualiser leurs courbes de niveau. Et comme l'origine est aussi un point de selle multiple de ces fonctions, elle est l'intersection de telles courbes.

À l'opposé du cas précédent, visualiser les courbes de niveau de plusieurs ensembles de niveau ne serait pas pratique et, pour cette raison, un seul sera affiché sur l'image suivante, à savoir $f_{3,k}(x, y, z) = f_{3,k}(\text{origine}) = 0$.

Il y a deux images ; une pour le cas

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow f_{3,k}(x, y, z) = \Re\left((x + iy)^{k+1}\right) + z^2 \text{ (figure 7)}$$

et l'autre pour le cas

$$\lambda_3 = -1 \Rightarrow f_{3,k}(x, y, z) = \Re\left((x + iy)^{k+1}\right) - z^2 \text{ (figure 8)}.$$

On peut remarquer une rotation autour de l'axe des z de $\frac{\pi}{k+1}$ degrés entre les figures 7 et 8.

Enfin, bien que difficile à bien voir, on présente aux figures 9 et 10 trois vues orthogonales et une vue en perspective du champ de gradient de $f_{3,2}$ lorsque $\lambda_3 = 1$ et seulement la vue en perspective lorsque $\lambda_3 = -1$.

On peut remarquer la similitude de la vue de dessus avec la figure 2 ; elle provient du fait que le champ de gradient des fonctions $\{f_{3,k}\}$ est le même en x et en y que celui des fonctions $\{f_{2,k}\}$.

On peut aussi remarquer l'inversion de la direction en z des vecteurs, entre les deux vues en perspective, dû au changement de signe de λ_3 qui fait passer la troisième composante des vecteurs de $2z$ à $-2z$.

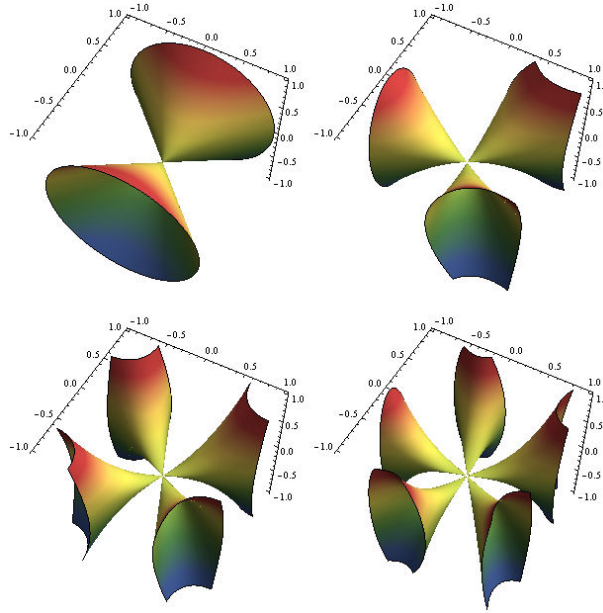


FIGURE 7. Courbes de niveau $f_{3,k}(x, y, z) = 0$ pour $1 \leq k \leq 4$ autour de l'origine ($\lambda_3 = 1$)

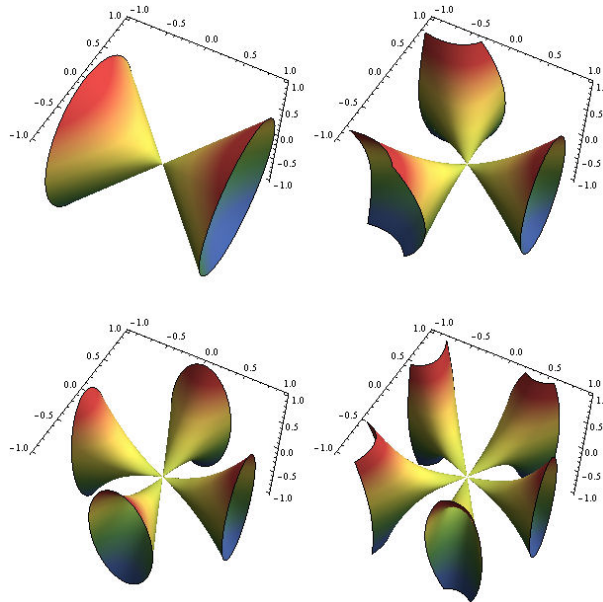


FIGURE 8. Courbes de niveau $f_{3,k}(x, y, z) = 0$ pour $1 \leq k \leq 4$ autour de l'origine ($\lambda_3 = -1$)

Notons que c'est la couleur et non la longueur des vecteurs qui est représentatif de leur norme ; plus les vecteurs sont près de l'axe des z et du plan $z = 0$, plus leur norme est petite.

On laisse au lecteur le soin de visualiser à quoi ressembleraient le champ de gradient des fonctions $f_{3,1}$, $f_{3,3}$ et $f_{3,4}$ à partir de ces deux images.

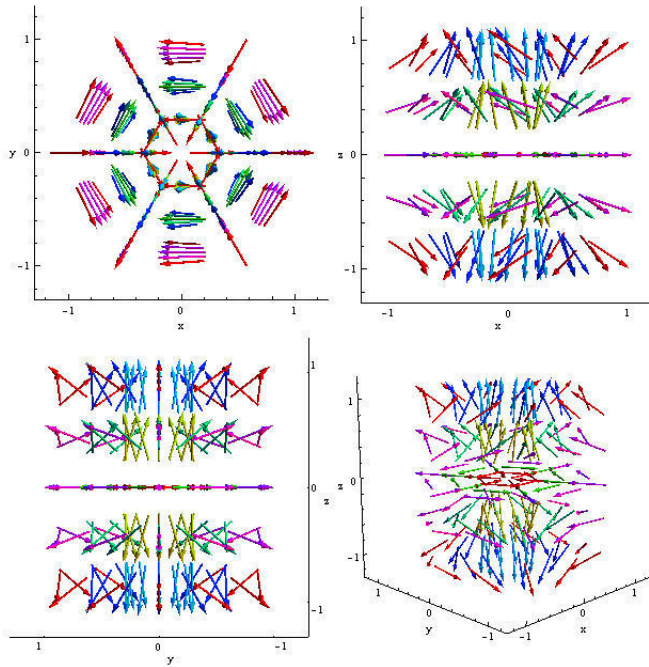


FIGURE 9. Quatre vues du champ de gradient de $f_{3,2}$ autour de l'origine ($\lambda_3 = 1$)

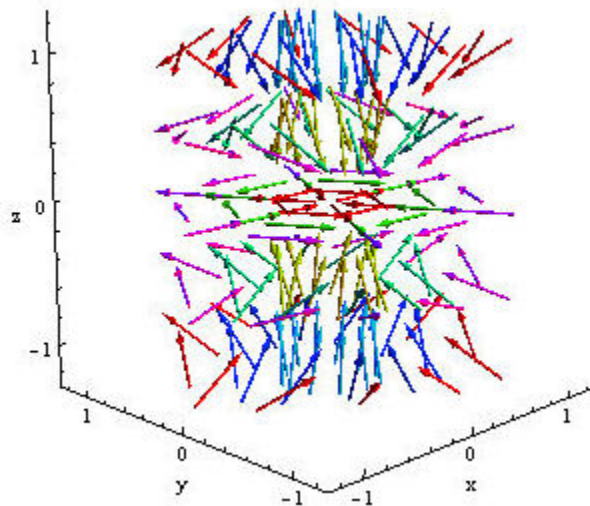


FIGURE 10. Champ de gradient de $f_{3,2}$ autour de l'origine ($\lambda_3 = -1$)

4.2. Visualisation à l'aide de projections stéréographiques

À la sous-section précédente, il a fallu trouver une manière de visualiser des fonctions en utilisant une dimension de moins que le nombre de dimensions requises pour voir leur graphe, qui est $n+1$. Les courbes de niveau ne nécessitent, en effet, que n dimensions pour les visualiser.

Pour les fonctions $\{f_{4,k}\}$, ce ne sera pas possible ; il faut donc trouver une autre manière de les visualiser, en utilisant encore une dimension de moins.

Pour ce faire, regardons l'équivalent de la figure 5 mais en ne conservant que les courbes d'un seul ensemble de niveau, comme dans les figures 7 et 8, qui sera $f_{2,k}(x, y) = 0$. La courbe du graphe est en orange si l'image de la fonction est positive et en bleu sinon.

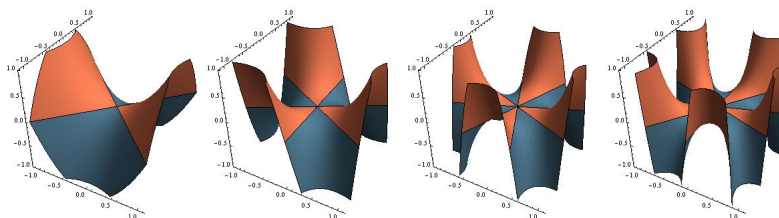


FIGURE 11. Graphe des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$, colorés selon le signe, autour de l'origine

Définition 4 : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on notera $L_n(f)$ et $L_P(f)$ les ensembles de points x du domaine pour lesquels $f(x)$ est négative, ou positive, respectivement.

Reprenons donc maintenant l'équivalent de la figure 6 mais adapté à l'image précédente. On a que les $\{L_n(f_{2,k})\}$ sont en bleu et les $\{L_P(f_{2,k})\}$ sont en orange. Les courbes de niveau $f_{2,k}(x, y) = 0$ sont, quant à elles, en noir.

Notons que les bordures noires qui sont tangentes à S^1 ne font pas partie des courbes de niveau ; elles ne font que représenter les pré-images des bordures des graphes de la figure 11.

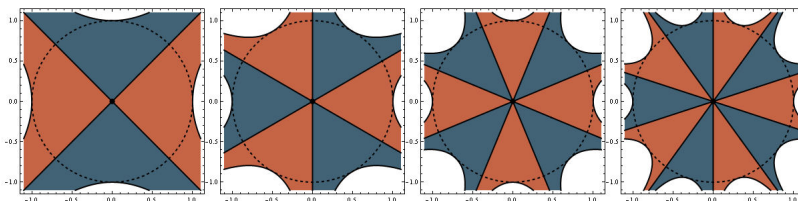


FIGURE 12. Ensembles L_N , en bleu, et L_P , en orange, des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$ autour de l'origine

Le choix des fonctions $\{f_{2,k}\}$, qui est de prendre la partie réelle d'une puissance entière d'un nombre complexe, a la particularité de diviser \mathbb{R}^2 en pointes de pizza (ou de tarte, au goût) qui appartiennent en alternance aux ensembles L_N et L_P .

De plus, à cause de ceci, si on restreint la visualisation de ces deux sous-ensembles à un cercle centré à l'origine, on s'aperçoit que le cercle est divisé en courbes de même longueur colorées, elles aussi, en alternance.

Or, la dimension d'un cercle étant de 1, on est parvenu à percevoir une caractéristique des fonctions $\{f_{2,k}\}$ en n'utilisant qu'un objet d'une dimension, mais qui nécessite tout de même deux dimensions pour être visualisé.

À partir d'ici, on peut tout simplement utiliser la projection stéréographique pour envoyer le cercle, moins un point de projection, sur une droite qui, elle, peut être visualisée en n'utilisant qu'une seule dimension.

Choisissons donc comme cercle S^1 et projetons-le sur la droite $y = -1$ à partir du point $(0, 1)$. Voici, combinées en une seule image, l'intersection des L_N et L_P avec S^1 et à quoi elle ressemble lorsque projetée sur la droite en question.

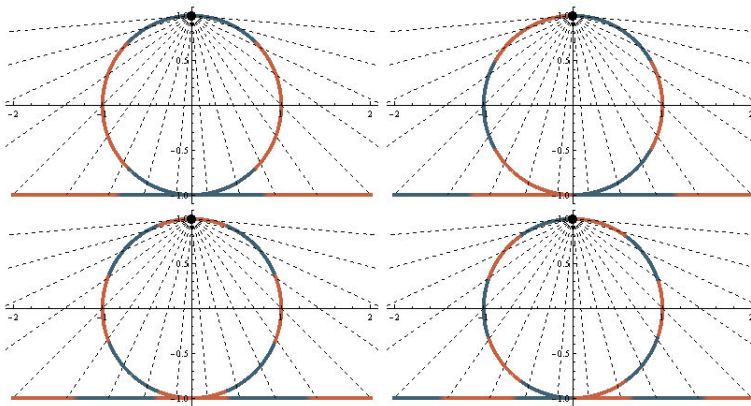


FIGURE 13. Visualisation et projection de l'intersection de S^1 avec les L_N et L_P des fonctions $f_{2,1}$ à $f_{2,4}$

On peut aussi faire un traitement similaire pour le cas $n = 3$, c'est-à-dire de visualiser directement les L_N et L_P , leur intersection avec S^2 puis enfin le résultat lorsque projeté sur un plan $z = c$. On espère ainsi retrouver un motif cyclique comme dans le cas $n = 2$.

Dans un premier temps, on peut avoir une bonne idée de ce à quoi ressemblent les L_N et L_P des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ pour $\lambda_3 = \pm 1$ en regardant les figures 7 et 8.

En effet, puisque ces dernières montrent l'ensemble de niveau $f_{3,k}(x, y, z) = 0$, on s'attend à ce qu'un des deux sous-ensembles soit compris à l'intérieur des $k + 1$ courbes avec l'autre occupant tout l'extérieur de celles-ci. On aurait donc un sous-ensemble connexe et l'autre non.

C'est bel et bien ce qui se passe. Sur les deux images suivantes, on voit que lorsque $\lambda_3 = 1$, les L_N sont l'union de $k + 1$ volumes tandis que les L_P ne sont formés que d'un volume. À l'inverse, lorsque $\lambda_3 = -1$, les L_N ne sont qu'un volume et les L_P , $k + 1$.

Spécifions que le degré de l'origine est $-k$ si $\lambda_3 = 1$ et k si $\lambda_3 = -1$.

Ensuite, prenons l'intersection des L_N et L_P avec S^2 et projetons-la sur un plan $z = c$ à partir du point $(0, 0, 1)$. Ici, le choix de c est $c = \frac{1}{4}$ pour faire en sorte

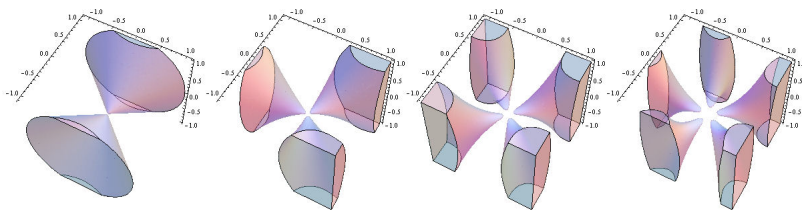


FIGURE 14. Visualisation des L_N des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ autour de l'origine ($\lambda_3 = 1$)

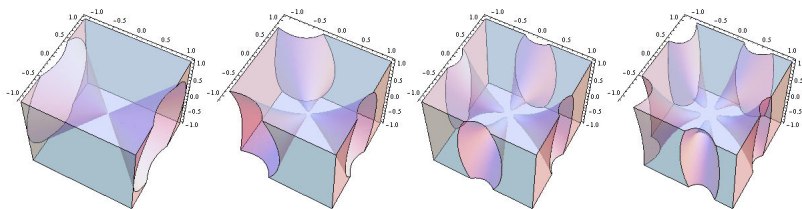


FIGURE 15. Visualisation des L_N des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ autour de l'origine ($\lambda_3 = -1$)

que l'intersection avec le sous-ensemble qui est constitué de $k + 1$ volumes, qui est L_N ou L_P selon λ_3 , puisse être visualisée au complet sur le plan de projection.

En fait, plus le plan de projection est près du point de projection, plus les motifs en forme de goutte, qu'on voit sur les deux figures qui viennent, sont concentrés autour de l'origine.

Pour faciliter la visualisation, il y aura deux exemplaires du plan de projection. Le vrai plan, $z = \frac{1}{4}$, est translucide pour qu'on puisse bien voir S^2 et sa copie, $z = -2$, est opaque pour qu'on puisse bien voir la projection.

On y reprend le même code de couleurs que sur les figures 11, 12 et 13 ; les L_N en bleu et les L_P en orange. Le point de projection est aussi mis en évidence.

Notons, qu'on peut les comparer aux figures 14 et 15 pour bien comprendre ce qui se produit.

Nous en sommes finalement arrivés à visualiser le cas où $n = 4$ à l'aide des projections. Le point de projection choisi est $(0, 0, 0, 1)$ avec comme volume de projection $w = \frac{2}{11}$.

Il y a cette fois quatre possibilités pour les fonctions $\{f_{4,k}\}$, selon les valeurs du couple (λ_3, λ_4) . Les couples $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ donnent un degré de $-k$ à l'origine et s'avèrent à être similaires. Les couples $(-1, 1)$ et $(1, -1)$, quant à eux, donnent un degré de k à l'origine et sont eux aussi similaires.

La similitude discutée est celle qu'on remarque avec les figures 14 et 15 ; il s'agit du fait que les L_N d'une image ressemblent en forme aux L_P de l'autre image et vice-versa. Ils sont aussi aux mêmes endroits à une rotation de $\frac{\pi}{k+1}$ degrés autour de l'axe des z . Ici, il ne s'agit pas des L_N et L_P mais bien de leur intersection avec S^3 .

Présentons d'abord le cas où le degré de l'origine est $-k$ car c'est celui qui ressemblent le plus aux gouttes obtenues dans les figures 16 et 17.

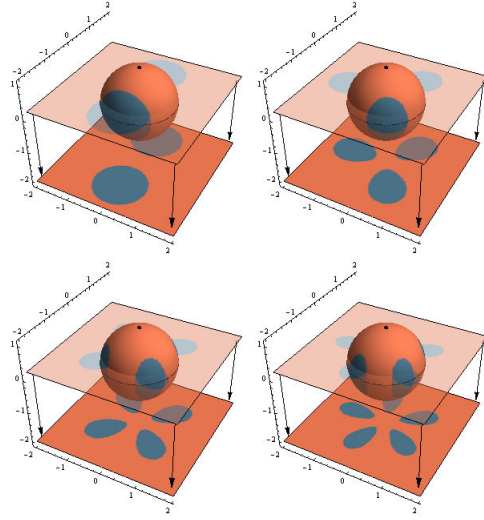


FIGURE 16. Visualisation et projection de l'intersection de S^2 avec les L_N et L_P des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ ($\lambda_3 = 1$)

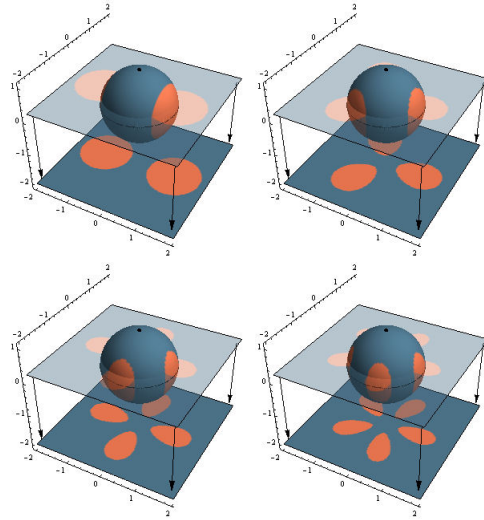


FIGURE 17. Visualisation et projection de l'intersection de S^2 avec les L_N et L_P des fonctions $f_{3,1}$ à $f_{3,4}$ ($\lambda_3 = -1$)

Comme on peut le voir, les gouttes sont maintenant en 3D et disposées de même manière autour de l'origine.

Le cas où le degré de l'origine est k produit des intersections avec S^3 qui n'ont rien à voir avec les gouttes ci-hauts. Les volumes obtenus sont, si on veut, des k -beignes et leur extérieur, où un k -beigne est un beigne avec $k+1$ poignées. De plus, ils sont tous connexes.

Cette importante différence motive aussi qu'on parle de types de point de selle multiple, tout comme le degré, comme exprimé à la fin de la section 3.

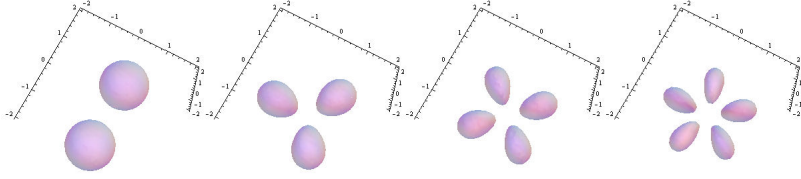


FIGURE 18. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$ ($\lambda_3 = 1, \lambda_4 = 1$)

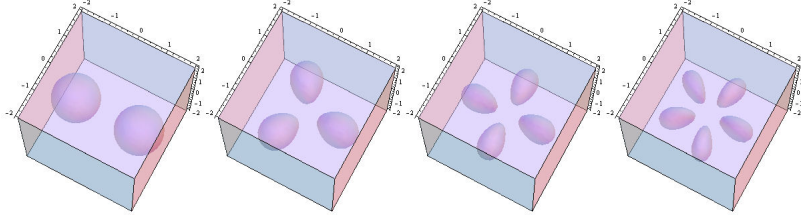


FIGURE 19. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$ ($\lambda_3 = -1, \lambda_4 = -1$)

Voyons de quoi ont l'air ces k -beignes. Pour mieux les voir, deux vues des mêmes volumes sont affichées à la figure 20. Une seule vue est donnée à la figure 21 dû à la similitude des formes.

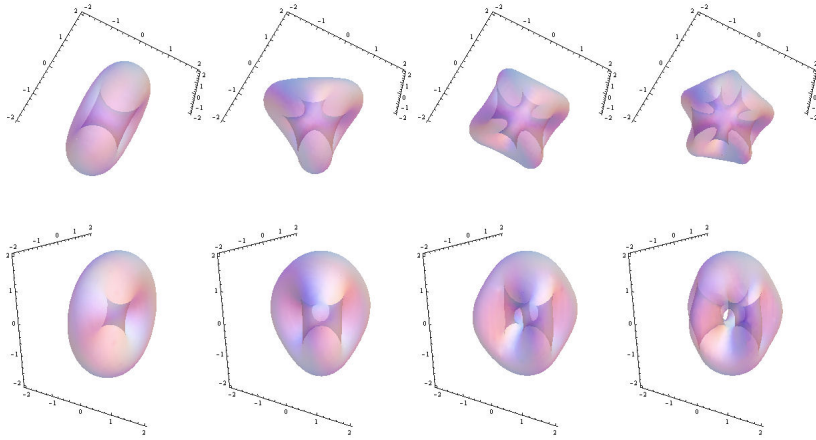


FIGURE 20. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$ ($\lambda_3 = -1, \lambda_4 = 1$)

5. Conclusion

Les calculs présentés dans la deuxième section ainsi que les caractéristiques visualisées dans les sections 3 et 4 laissent présager qu'il y a des types de points de selle multiple, du moins pour ceux des fonctions $\{f_{n,k}\}$.

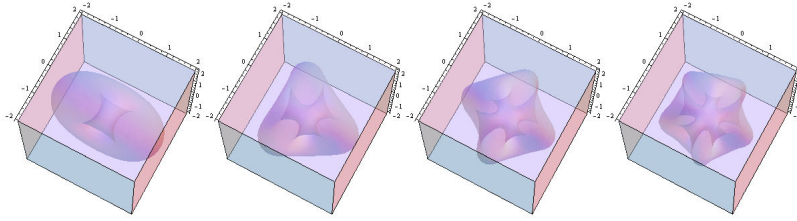


FIGURE 21. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions $f_{4,1}$ à $f_{4,4}$ ($\lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1$)

D'une part, le degré d'un tel point est soit k , soit $-k$ et d'autre part, on a vu que l'intersection avec une sphère unitaire des L_N et L_P donnaient des sous-ensembles dont la connexité variait.

Il serait bien entendu intéressant de poursuivre l'étude sur cette famille de fonctions en essayant de classifier tous les types de leur unique point critique, qui est dégénéré, l'origine.

Cette étude pourrait se faire en utilisant l'analyse et en étant peut-être alimentée par plus de moyens de visualisation, notamment pour les cas $n > 4$.

On pourrait aussi considérer d'autres fonctions que celles présentées qui auraient la particularité d'augmenter un point de selle multiple. Des méthodes de visualisation similaires à celles du texte pourraient aider à cibler de telles fonctions.

À propos de ceci et dans un autre effort de généralisation des fonctions $\{f_k\} = \{f_{2,k}\}$, il serait peut-être bon d'étudier la famille suivante, définie sur \mathbb{R}^4 en utilisant la partie réelle d'une puissance d'un quaternion. Notons cette famille $\{Q_l\}$ et posons

$$Q_l : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } Q_l(x, y, z, w) = \Re((x + iy + jz + kw)^{l+1})$$

où i, j et k définissent l'algèbre des quaternions par $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Voici un tableau donnant les fonctions Q_1 à Q_4 . On peut remarquer que, tout comme les fonctions $\{f_{2,k}\}$ et contrairement aux fonctions $\{f_{4,k}\}$, elles sont homogènes et, par conséquent, on a que, $\forall c \in \mathbb{R}$, $Q_l(cx, cy, cz, cw) = c^{l+1}Q_l(x, y, z, w)$.

Notons aussi que $Q_1 = f_{4,1}$ lorsque $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

TABLE 7. Q_l pour $1 \leq l \leq 4$

l	Q_l
1	$x^2 - y^2 - z^2 - w^2$
2	$x^3 - 3xy^2 - 3xz^2 - 3xw^2$
3	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 6x^2z^2 + 2y^2z^2 + z^4 - 6x^2w^2 + 2y^2w^2 + 2z^2w^2 + w^4$
4	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 - 10x^3z^2 + 10xy^2z^2 + 5xz^4 - 10x^3w^2 + 10xy^2w^2 + 10xz^2w^2 + 5xw^4$

La prochaine et dernière image visualise les projections stéréographiques de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions Q_1 à Q_8 . Le point de projection est $(0, 0, 0, 1)$ et le volume de projection est $w = 0$.

Précisons deux similitudes remarquantes que cette figure a avec la figure 13 et qu'aucune des figures 18 à 21 ne possèdent.

Premièrement, comparons les droites $y = 0$ de la figure 13 avec les droites $(y, z) = (0, 0)$ des projections à la première rangée. Imaginons que ces dernières sont colorées en bleu et en orange selon leur intersection avec les sous-ensembles $L_N \cap S^3$ et $L_P \cap S^3$, respectivement.

Et bien on peut remarquer qu'à partir de l'origine, ces droites sont colorées identiquement par rapport à l'ordre des couleurs et au nombre de régions de chaque couleur.

Deuxièmement, les $L_N \cap S^3$ et $L_P \cap S^3$ sont tous non-connexes, sauf dans le cas où $l = 1$.

Voilà donc, pour terminer, la figure en question.

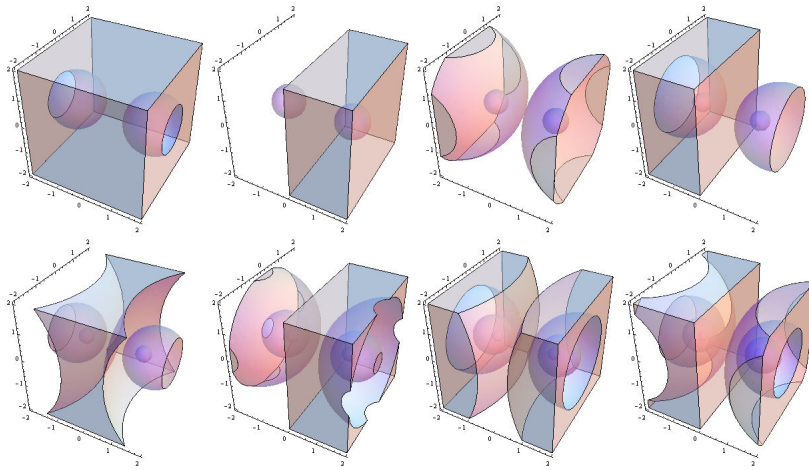


FIGURE 22. Visualisation de la projection de l'intersection de S^3 avec les L_N des fonctions Q_1 à Q_8

Références

- [1] André Delachet. *Le Calcul vectoriel*. Presses Universitaires France (Sep 1 1979), 1979.
- [2] Sara Derivière, Tomasz Kaczynski, and Pierre-Olivier Vallerand. *On the decomposition and local degree of multiple saddles*. Ann. Sci. Math. Québec 33 (2009), no 1, 45-62, Mai 2008.
- [3] N. G. Lloyd. *Degree theory*. Cambridge Tracts in Math., vol. 73, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Great Britain, 1978.
- [4] Wikipedia. *Quaternion* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. <http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>, 2010.
- [5] Wikipedia. *Stereographic projection* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection, 2010.

RÉMI GAGNÉ, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
 Courriel: remi.gagne@usherbrooke.ca

QUATERNIONS ET ROTATIONS

FRANCIS DUSSEAUT-BÉLANGER

RÉSUMÉ.

Les quaternions sont un outil fort utile pour représenter les rotations dans l'espace. On expliquera donc pourquoi et comment ils sont passés maîtres des mouvements de l'espace allant même surpasser leurs prédécesseurs. Toutefois, on traitera a priori de la construction des quaternions pour en déduire les différentes propriétés analytiques et algébriques de ceux-ci ainsi que leurs différentes représentations.

1. Introduction

L'ensemble des quaternions, noté \mathbb{H} , a été introduit au beau milieu du 19^e siècle par le mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton afin de présenter un moyen plus efficace de manipuler les vecteurs dans l'espace à trois dimensions. En fait, par ses travaux, Hamilton tentait de bâtir une structure permettant de travailler avec les points dans l'espace comme on travaille avec les nombres complexes pour représenter des points sur un plan. Cependant, il n'a pas obtenu trop de succès puisque, même s'il savait comment additionner ou multiplier des triplets de nombres, il était incapable de trouver une manière de les diviser. D'ailleurs, Frobenius prouva en 1877 que cela était même impossible.

C'est pendant qu'il marchait avec sa femme le long du Canal Royal de Dublin le 16 octobre 1843, qu'il a eu l'éclair de génie qui allait plus tard devenir le fondement des quaternions. En effet, c'est lorsqu'il se tenait sur le pont de Brougham qu'il a compris que bien qu'il lui était impossible de trouver un moyen de diviser des triplets de nombres, il pouvait diviser des quadruplets de nombres. La légende dit qu'il s'est même arrêté pour graver les règles de base de la multiplication de son nouveau système sur le pont, c'est-à-dire $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. D'ailleurs, une plaque commémorative est toujours affichée sur le pont de Brougham de nos jours pour immortaliser l'anecdote puisqu'aucune trace de la gravure initiale de Hamilton n'est apparente aujourd'hui.

Hamilton appela ces quadruplets de nombres des quaternions et dévoua le reste de sa vie à l'étude et à l'enseignement de ceux-ci. Il a même fondé une école de *quaternionistes* qu'il a dirigée jusqu'à sa mort. L'école ne mourra cependant pas avec lui puisque Peter Tait, pionnier de la thermodynamique et élève

émérite de Hamilton, continua à promouvoir les quaternions. Toutefois, il n'a pas eu de succès puisque Gibbs et Heaviside attiraient la majorité de l'intérêt mathématique avec leurs travaux sur les fondements de l'analyse vectorielle, ce qui a fait sombrer les quaternions dans l'oubli. Par contre, l'utilité et la simplicité de la structure des quaternions est telle que plusieurs mathématiciens ont recommencé à travailler avec ceux-ci vers la fin du 20^e siècle avec l'arrivée de l'ère informatique. Certains ont même poussé leurs études jusqu'à généraliser les travaux de Hamilton à d'autres ensembles semblables comme les octonions pour travailler avec l'espace à quatre dimensions. [1]

On traite donc dans ce présent article des différents travaux de Hamilton sur les quaternions. On présente, entre autres, le groupe à la base de la structure des quaternions pour ensuite exposer les différentes propriétés analytiques et algébriques dérivant de celui-ci. On expose aussi les différents liens unissant les quaternions à d'autres structures algébriques telles les matrices et ceux unissant ces mêmes quaternions avec les rotations dans l'espace. Enfin, on explique pourquoi les quaternions sont un des meilleurs outils disponibles à ce jour pour représenter les mouvements dans l'espace.

2. Groupe quaternionique

Le groupe quaternionique, que l'on note Q_8 , est un groupe non abélien d'ordre 8 défini par les règles de multiplication de Hamilton, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij = -ji = k \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \end{aligned}$$

En effet, si on définit Q_8 comme l'ensemble engendré par 1, i , j et k , on peut facilement démontrer avec les règles évoquées plus haut que la structure est bel et bien un groupe pour la multiplication. Pour le prouver, associons par exemple les éléments 1, i , j et k aux éléments du sous-groupe de $M_2(\mathbb{C})$ engendré par les éléments suivants respectant les règles de multiplication de Hamilton.

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, j \rightarrow \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \\ i &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, k \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De plus, on remarque que les images des éléments 1, i , j et k sont linéairement indépendants, ce qui nous amène éventuellement à la construction des quaternions.

3. Quaternions

3.1. Définition

Commençons maintenant à étudier les quaternions, notamment leur édification à l'aide de la construction de Cayley-Dickson.

3.1.1. *Construction.* La construction des quaternions à partir des nombres complexes est tout à fait identique à la construction des nombres complexes à l'aide des nombres réels. C'est d'ailleurs à cause de cette construction que les quaternions et les octonions, qui se construisent identiquement à l'aide des quaternions, sont souvent appelés des nombres hypercomplexes.

Prenons un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{C} admettant comme base l'élément 1 et j du groupe quaternionique. Un vecteur de cet espace peut donc être écrit sous la forme

$$(a + bi)1 + (c + di)j$$

ou, grâce à la loi de distributivité, comme

$$a1 + bi + cj + dij = a + bi + cj + dk$$

où 1, i , j , et k sont les éléments de Q_8 et a, b, c et d des nombres réels quelconques. Le nombre $a + bi + cj + dk$ ainsi défini se nomme donc quaternion en vertu de ce que Hamilton a exposé. On peut aussi noter les quaternions comme (a, b, c, d) où a, b, c et d sont les coefficients définis plus haut ou comme

$$q = q_0 + \vec{q}$$

où q_0 est un nombre réel et \vec{q} un vecteur (q_x, q_y, q_z) de \mathbb{R}^3 .

Enchaînons maintenant avec quelques définitions :

DÉFINITION 1. *Le nombre réel q_0 est appelé **partie réelle** du quaternion. On le note $Re(q)$.*

DÉFINITION 2. *Le vecteur \vec{q} est appelé **partie imaginaire** du quaternion. On le note $Im(q)$.*

DÉFINITION 3. *Un nombre de la forme $q = q_0$ est appelé **quaternion scalaire**.*

DÉFINITION 4. *Un nombre de la forme $q = \vec{q}$ est appelé **quaternion pur**.*

DÉFINITION 5. *Un quaternion ayant une norme de 1 sera appelé **quaternion unitaire**. La norme sera définie dans la section 3.2.2.*

3.1.2. *Opérations.* Pour compléter, nous définissons trois opérations sur les quaternions : l'addition, la multiplication scalaire et la multiplication quaternionique.

L'addition et la multiplication scalaire s'effectue de la même manière que dans \mathbb{R}^4 et possède ainsi les mêmes propriétés. Par exemple, si $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ pour $n = 1, 2$, alors

$$q_1 = (\alpha a_1) + (\alpha b_1)i + (\alpha c_1)j + (\alpha d_1)k$$

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

Enfin, la multiplication de quaternions est définie à la manière des complexes, c'est-à-dire que l'on applique la loi de distributivité. Par contre, il existe un moyen plus simple de noter le résultat sous forme scalaire-vecteur $q_0 + \vec{q}$. En effet, on remarque que le produit quaternionique de p et q peut se représenter par

$$pq = (p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q}) + (p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q})$$

où \cdot est le produit scalaire et \times le produit vectoriel tels que définis en analyse multidimensionnelle réelle.

Il est important de noter que la multiplication quaternionique n'est pas commutative, notamment dû au produit vectoriel la composant. La notation $\frac{q_1}{q_2}$ est donc à éviter pour représenter la multiplication par l'inverse de q_2 puisqu'elle engendre une ambiguïté : multiplication à gauche ou à droite ?

3.2. Propriétés analytiques

3.2.1. *Conjugaison.* On définit le conjugué d'un quaternion :

DÉFINITION 6. *Le **conjugué** d'un quaternion $q = q_0 + \vec{q}$ est $\bar{q} = q_0 - \vec{q}$.*

La conjugaison des quaternions est donc tout à fait analogue à celle des complexes : il ne suffit que de changer le signe de la partie imaginaire. Par contre, quelques propriétés sont différentes comme le fait que le conjugué d'un produit est le produit renversé des conjugués, c'est-à-dire que :

PROPOSITION 1. *Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, alors $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}$.*

Autres faits intéressants concernant la conjugaison de quaternions : elle peut être représentée comme une fonction de q , c'est-à-dire que :

PROPOSITION 2. *Soit $q \in \mathbb{H}$, alors $\bar{q} = -\frac{1}{2}(q + iqi + jqj + kqk)$*

De plus, les parties imaginaire et réelle d'un quaternion peuvent être extraites à l'aide de :

PROPOSITION 3. *Soit $q \in \mathbb{H}$, alors $Im(q) = \frac{q - \bar{q}}{2}$ et $Re(q) = \frac{q + \bar{q}}{2}$.*

3.2.2. *Norme.* Ensuite, avec la conjugaison ainsi définie, on définit la norme d'un quaternion comme la racine carrée du produit du quaternion par son conjugué, c'est-à-dire :

DÉFINITION 7. *La **norme** d'un quaternion q est $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$.*

Cette norme n'est rien de moins que la norme euclidienne de \mathbb{H} puisque, après quelques calculs, on voit que

$$\|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Donc, en vertu de ce qui a été énoncé \mathbb{H} est un espace métrique admettant, entre autres, comme métrique la norme euclidienne.

De plus, la norme euclidienne d'un quaternion est nécessaire à la construction de l'inverse multiplicatif de celui-ci. En effet, ce dernier est tout simplement le conjugué du quaternion divisé par sa norme au carré, c'est-à-dire que :

DÉFINITION 8. *L'**inverse** d'un quaternion q est défini comme $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$*

On remarque deux choses à partir de cette définition. Premièrement, on voit que l'inverse d'un produit de quaternions est le produit inversé des inverses, c'est-à-dire :

PROPOSITION 4. *Soient $p, q \in \mathbb{H}$, alors $(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$*

Enfin, l'inverse d'un quaternion unitaire est tout simplement son conjugué :

PROPOSITION 5. *Soit $p \in \mathbb{H}$ unitaire, alors $(p)^{-1} = \bar{p}$*

3.2.3. Forme polaire et exponentiation. Tout comme un nombre complexe $a + bi$ possède une forme polaire $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, on peut définir une forme polaire pour les quaternions. En effet, on peut décomposer un quaternion quelconque $q = q_0 + \vec{q}$ sous la forme

$$q = \rho(\cos(\theta) + \vec{v}\sin(\theta))$$

où $\rho = \|q\|$ et θ sont des nombres réels et \vec{v} est un quaternion pur unitaire. Ainsi, pour tout quaternion non scalaire, la forme polaire des quaternions est, à l'instar de son équivalent complexe, unique à $2k\pi$ près pour θ .

On peut même pousser un peu plus loin la similitude en définissant la fonction exponentielle avec la série usuelle pour obtenir le développement quaternionique suivant :

DÉFINITION 9. *L'exponentiel d'un quaternion q est définie comme $e^q = e^{q_0}(\cos(\|\vec{q}\|) + \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}\sin(\|\vec{q}\|))$.*

Une forme équivalente se déduit aussi de la forme polaire d'un quaternion :

PROPOSITION 6. *Soit $q \in \mathbb{H}$ tel que sa forme polaire est $q = \rho(\cos(\theta) + \vec{v}\sin(\theta))$ où $\rho = \|q\|$. Alors, $e^q = \rho e^{\theta\vec{v}}$.*

3.2.4. Racines de -1. Pour illustrer le résultat, étudions l'équation $q^2 = (a + bi + cj + dk)^2 = -1$. Ainsi, on espère avoir :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -1 \\ 2ab = 0 \\ 2ac = 0 \\ 2ad = 0 \end{cases}$$

Donc, pour satisfaire aux trois dernières équations, il faut que $a = 0$ ou bien que $b = c = d = 0$. Or, si $b = c = d = 0$, alors la première équation indique que $a^2 = -1$, mais $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, $a = 0$ et $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. En d'autres mots, l'ensemble des racines de -1 peut être représenté par la sphère unitaire de \mathbb{R}^3 .

3.3. Propriétés algébriques

L'ensemble des quaternions \mathbb{H} est un espace vectoriel réel de dimension 4 admettant $(1, i, j, k)$ comme base. En guise de comparaison, les réels sont de dimension 1 admettant 1 comme base, les complexes sont de dimension 2 avec $(1, i)$ comme base et les octonions sont de dimension 8. Tous comme les réels et les complexes, les quaternions admettent une multiplication associative et distributive sur l'addition, mais différent de \mathbb{R} et \mathbb{C} en ce sens que sa multiplication n'est pas commutative. Ainsi, cela fait de \mathbb{H} une algèbre associative non-commutative sur les réels, mais non une algèbre associative sur les complexes.

De plus, puisqu'il est possible de diviser des quaternions, l'ensemble \mathbb{H} peut aussi être considéré comme une algèbre de division sur les nombres réels. Ce qui rend la chose intéressante par contre, c'est que Frobenius a démontré en 1877 qu'il n'existait qu'exactly trois de ces algèbres engendrés par un nombre fini d'éléments à isomorphisme près, soit \mathbb{R} , \mathbb{C} et \mathbb{H} . De plus, dans le même ordre d'idées, Hurwitz a aussi prouvé qu'il n'existait que quatre algèbres normés sur les réels, soit \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} et \mathbb{O} , les octonions.

Enfin, notons que \mathbb{H} admet une infinité de sous-algèbres. En effet, on peut démontrer que ces sous-algèbres sont les sous-algèbres triviales \mathbb{R} et \mathbb{H} ainsi qu'une infinité de plans isomorphes au corps des complexes.

3.4. Représentations alternatives

Les quaternions ont acquis à leur création une forme très précise, soit $q = a + bi + cj + dk$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $i, j, k \in Q_8$, mais les mathématiciens ont transformé en quelque sorte cette représentation en introduisant certains homomorphismes injectifs utiles des quaternions vers d'autres structures. De ces relations sont nées des représentations alternatives qui, à défaut de révolutionner les quaternions, réduisent les opérations quaternioniques à des opérations bien connues sur les ensembles de matrices $M_2(\mathbb{C})$ et $M_4(\mathbb{R})$.

En premier lieu, le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ peut être représenté dans $M_2(\mathbb{C})$ comme la matrice

$$\begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix}$$

Dans cette situation bien précise, l'addition et la multiplication deviennent tout simplement l'addition et la multiplication de matrices. De même, la norme se transforme en la racine carrée du déterminant et la conjugaison en matrice adjointe.

En deuxième lieu, on peut construire un homomorphisme entre \mathbb{H} et $M_4(\mathbb{R})$ de sorte que le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ peut être représenté comme la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, l'addition et la multiplication sont équivalentes à l'addition et la multiplication matricielle, la norme devient la racine quatrième du déterminant et la conjugaison devient la transposition.

4. Rotations

4.1. Définition et propriétés

Étudions maintenant le comportement des quaternions en relation avec les rotations dans \mathbb{R}^3 .

DÉFINITION 10. Soient $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|\vec{v}\| = 1$, on nommera **quaternion de rotation** ou q_r l'élément de \mathbb{H} tel que $q_r = \cos(\frac{\theta}{2}) + \vec{v}\sin(\frac{\theta}{2})$.

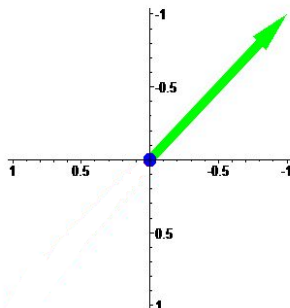
PROPOSITION 7. Un quaternion de rotation est un quaternion unitaire.

Certes, on n'appelle pas q_r quaternion de rotation que pour le plaisir. On le nomme ainsi à cause de son implication dans le calcul de rotations dans l'espace. En effet, si on multiplie un quaternion pur \vec{x} correspondant à un vecteur de \mathbb{R}^3 par q_r à gauche et par $\overline{q_r}$ à droite, on obtient le vecteur \vec{x}' qui résulte d'une rotation de \vec{x} de θ degrés autour de l'axe de rotation \vec{v} . On définit donc la fonction

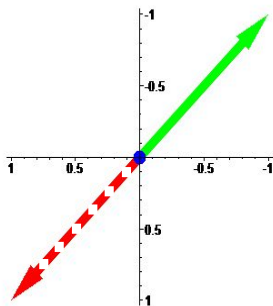
$$R_{q_r}(\vec{x}) = q_r(0 + \vec{x})\overline{q_r} = q_r(0 + \vec{x})q_r^{-1}$$

comme la fonction de rotation par le quaternion q_r . [2]

En guise d'exemple, illustrons la rotation de π radians du vecteur $(1, 1, 0)$ autour de l'axe $(0, 0, 1)$. À la base, nous avons donc le vecteur suivant :



Calculons donc maintenant, à l'aide de ces données, le vecteur résultant de la rotation. En d'autres mots, on recherche le vecteur résultant de l'opération $R_{q_r}(\vec{x})$ telle que définie en 4.1 où \vec{x} est le vecteur que l'on veut transformer. Ainsi, dans notre cas précis, on a $q_r = (0, 0, 0, 1)$ et $\vec{x} = \overrightarrow{(1, 1, 0)}$, c'est-à-dire $(0, 1, 1, 0)$ sous forme de quaternions. Or, $R_{(0,0,0,1)}(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)(0, 1, 1, 0)\overline{(0, 0, 0, 1)} = (0, -1, -1, 0)$. Graphiquement, cela correspond au nouveau vecteur pointillé :



Étudions ce qui se passe si on veut composer la rotation par q_r et q'_r par exemple.

$$\begin{aligned}
 R_{q_r}(R_{q'_r}(\vec{x})) &= R_{q_r}(q'_r(0 + \vec{x})\overline{q'_r}) \\
 &= q_r q'_r(0 + \vec{x})\overline{q'_r q_r} \\
 &= (q_r q'_r)(0 + \vec{x})\overline{(q_r q'_r)} \\
 &= R_{q_r q'_r}(\vec{x})
 \end{aligned}$$

Ainsi, la composition de deux rotations générés par q_r et q'_r n'est rien de plus simple que la rotation par le produit de ceux-ci.

PROPOSITION 8. *Soient q_r et q'_r deux quaternions de rotations, alors $R_{q_r}(R_{q'_r}(\vec{x})) = R_{q_r q'_r}(\vec{x})$, c'est-à-dire que la composition de deux rotations correspond à la rotation par leur produit.*

Il faut toutefois encore faire attention à l'ordre de multiplication puisque, on le rappelle, la multiplication de quaternions n'est pas commutative tout comme la composition de rotations dans l'espace d'ailleurs. De plus, notons qu'il est facile de généraliser le résultat à l'aide d'une récurrence simple afin de démontrer que l'énoncé est vrai pour un nombre quelconque de rotations. On peut aussi déduire de cette propriété que la rotation inverse d'une rotation correspondant à un quaternion q_r est une rotation par q_r^{-1} .

Enfin, on remarque que

$$\begin{aligned} R_{-q_r}(\vec{x}) &= -q_r(0 + \vec{x})\overline{-q_r} \\ &= (-1)q_r(0 + \vec{x})(-1)\overline{q_r} \\ &= q_r(0 + \vec{x})\overline{q_r} \\ &= R_{q_r} \end{aligned}$$

Ainsi, on remarque que :

PROPOSITION 9. *La rotation par le quaternion de rotation q_r est équivalente à la rotation par $-q_r$.*

4.2. Pourquoi les quaternions ?

La représentation des rotations à l'aide des quaternions représente de nombreux avantages si on la compare avec quelques autres méthodes connues comme les angles d'Euler ou les matrices de rotations. Par exemple, elle est une représentation beaucoup plus compacte que les matrices de rotations puisqu'elle ne comporte que quatre éléments à mettre en mémoire, comparativement à 9 éléments pour une matrice de rotation ou même 16 éléments pour un système de coordonnées homogènes. De plus, comparativement aux angles d'Euler qui comportent certaines singularités (le blocage de cardans ou *gimbal lock* par exemple [3]), la représentation quaternionique n'en comporte aucune et la normalisation de quaternions est beaucoup moins laborieuse que la normalisation de matrices de rotation. Enfin, notons aussi que les rotations peuvent être composés beaucoup plus efficacement à l'aide de quaternions qu'à l'aide de matrices. En d'autres mots, les quaternions sont plus stables numériquement que les matrices.

Références

- [1] John H. Conway et Derek A. Smith, *On Quaternions and Octonions*. University of California, Riverside, 2004.
- [2] Charles F. F. Karney, *Quaternions in molecular modeling*. Sarnoff Corporation, Princeton, 2005.
- [3] *Quaternion*. Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>.

FRANCIS DUSSEAUT-BÉLANGER, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Courriel: francis.dusseault-belanger@usherbrooke.ca

MUTATIONS DE CARQUOIS

GRÉGOIRE DUPONT

RÉSUMÉ. En 2001, Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky ont introduit un procédé combinatoire appelé *mutation* modifiant localement un carquois, c'est à dire un graphe orienté fini. L'application récursive de ce procédé à un carquois donné génère une liste de carquois qui peut être finie ou infinie. Le problème de la classification des carquois donnant une liste finie, bien que de nature simple, a demandé plusieurs années de travail avant d'être résolu par Anna Felikson, Michael Shapiro et Pavel Tumarkin en novembre 2008.

Dans cet article, nous introduisons de manière élémentaire la notion de mutation et présentons la classification de Felikson, Shapiro et Tumarkin d'un point de vue à la fois mathématique et épistémologique.

Cet article fait suite à un exposé donné au *Club Mathématique* de l'université de Sherbrooke en septembre 2009.

Avant-propos

Dans cet article, nous présentons un bref chapitre de l'histoire contemporaine de la recherche en mathématiques à travers la formulation et la résolution d'un problème qui se situe dans un domaine jeune et en pleine expansion : les *algèbres amassées* de Fomin et Zelevinsky. Le lecteur averti pourra dans un premier temps être surpris du choix du sujet exposé. Les essais présentant l'histoire de problèmes mathématiques se concentrent habituellement sur des sujets plus établis et n'exposent que des percées aussi majeures que la démonstration du grand théorème de Fermat [Sin99] ou celle de la conjecture de Poincaré [Szp09]. Cependant, le but de cet article n'est pas tant de présenter une avancée importante des mathématiques que d'exposer en quelques pages certains rouages de la recherche contemporaine. L'exemple retenu l'a donc surtout été pour sa vertu pédagogique et pour sa facilité d'exposition. Mais au-delà de ces aspects, cet exemple expose tout de même des notions fondamentales de la recherche actuelle en mathématiques pures.

Le procédé de *mutation* dont il sera question tout au long de l'article est une notion qui a été définie au début des années 2000 par Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Bien que les motivations profondes des deux chercheurs se trouvent dans un monde mathématique très élaboré, la définition de la mutation peut se

faire en des termes simples et faciles à exposer. Et puisqu'il nous est impossible de motiver précisément ce procédé sans faire appel à d'amples prérequis, nous dirons simplement qu'il est dû à la perspicacité de Sergey Fomin et d'Andrei Zelevinsky, qui ont su observer une certaine régularité dans des domaines pointus de l'algèbre afin d'en déduire cette idée simple, élégante, unificatrice et incroyablement fertile qu'est la *mutation*.

Dans cet article, nous ne nous concentrerons que sur un aspect combinatoire des problématiques soulevées par la notion de mutation. Pour beaucoup d'entre elles, ces problématiques sont encore un objet d'étude. Cependant, on peut maintenant considérer que celle que nous exposons a été résolue, ou du moins qu'une des questions liées à cette problématique l'a été. La dernière section de cet article présente néanmoins d'autres problèmes connexes, ouverts pour la plupart. Encore une fois, le choix des problèmes présentés est arbitraire et pourrait être discuté d'un point de vue purement scientifique. Cependant, cette sélection de problèmes additionnels vise plus à souligner que la réponse à une question n'est pas une fin en soi mais plutôt le point de départ de nouvelles recherches.

J'apporterai enfin quelques mises en garde sur les spécificités de cet exemple. De prime abord, la façon dont j'ai choisi d'exposer le problème pourrait laisser entendre que la motivation principale dans la recherche mathématique est la pure curiosité. Il va sans dire que l'on ne pourrait ramener toutes les motivations de la recherche à la simple curiosité. Cependant, les motivations mathématiques les plus profondes sont aussi les plus difficiles à comprendre pour le grand public. La curiosité est quant à elle une motivation bien plus universelle, il m'a donc semblé naturel de m'y ramener. Aussi, l'échelle de temps sur laquelle un tel problème est résolu peut varier grandement d'une question à l'autre. Ici, il s'est écoulé une demi-douzaine d'années entre l'apparition du problème et sa résolution mais de manière générale, la résolution d'un problème peut occuper des décennies. Ceci étant, à un facteur de dilatation temporel près, l'essentiel des aspects de la résolution du problème que nous présentons forment un exemple représentatif de résolution d'un problème moderne.

Cet article ne nécessite aucun prérequis particulier. Afin d'en améliorer la lisibilité, j'ai fait le choix de certaines simplifications techniques, notamment concernant les triangulations de surfaces. Le lecteur pointilleux pourra se référer aux notes de bas de page ou à la bibliographie pour trouver les énoncés précis. Enfin, je ne donnerai que quelques preuves élémentaires susceptibles d'aider le lecteur à se familiariser avec les objets en jeu ; je laisse le soin au lecteur curieux de se référer à la bibliographie pour tenter de comprendre les preuves des énoncés avancés et ainsi que le cadre bien plus vaste dans lequel ces recherches trouvent réellement leur place.

1. Mutations de carquois

Comme cela a déjà été mentionné, l'objet central de notre étude est la *mutation*. Ce procédé a été introduit par Fomin et Zelevinsky dans un article prépublié

en 2001 comme un procédé combinatoire permettant de définir des structures algébriques fondamentales appelées *algèbres amassées*. Initialement, la mutation s'applique à deux types d'objets mathématiques distincts : des carquois et des familles de variables. Dans notre cas, nous ne nous intéresserons pas à la mutation des variables et en conséquence, nous ne nous intéresserons pas aux algèbres amassées à proprement parler. Nous restreindrons notre étude à la mutation des carquois et aux questions qu'elles soulèvent, indépendamment de la théorie des algèbres amassées.

DÉFINITION 1.1. (1) Un *carquois* Q est la donnée d'un ensemble S de sommets et d'un ensemble F de flèches entre ces sommets. On supposera toujours que S et F sont des ensembles finis.

(2) Un *p-cycle* dans Q est une suite de p flèches

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_p \rightarrow i_{p+1}$$

telle que les sommets i_1 et i_{p+1} sont les mêmes.

(3) Une *boucle* est un 1-cycle, autrement dit, c'est une flèche dont les deux extrémités coïncident.

(4) Dans cet article, nous supposerons de plus qu'un carquois ne contient ni boucles ni 2-cycles.

Dans la suite, nous supposerons toujours que les carquois considérés sont *connexes*, c'est à dire que le graphe non-orienté obtenu en oubliant les orientations des flèches, appelé *diagramme sous-jacent*, est constitué d'un seul « morceau ». Si le carquois Q est constitué de plusieurs morceaux, appelés *composantes connexes*, alors, pour les notions auxquelles nous allons nous intéresser, l'étude de Q peut se ramener à l'étude de chacune de ses composantes connexes.

DÉFINITION 1.2. Soit Q un carquois et soit i un sommet de Q . La *mutation de Q en i* est le carquois $\mu_i(Q)$ obtenu à partir de Q en appliquant les modifications locales suivantes :

(1) On inverse le sens de toutes les flèches rentrant ou sortant de i ;

1. La bibliographie à ce sujet est bien trop vaste pour être détaillée ici. Cependant, le lecteur intéressé pourra consulter les articles séminaux [FZ02, FZ03, BFZ05, FZ07] ou bien l'introduction plus élémentaire rédigée par Bertrand Nguefack dans un rapport de recherche du département de mathématiques de l'université de Sherbrooke [Ngu07].

2. Initialement, la mutation n'a en fait pas été définie sur des carquois mais sur des matrices. La passerelle entre la définition que nous allons utiliser et celle de Fomin et Zelevinsky se fait à l'aide des matrices d'incidence de carquois. C'est à dire qu'à un carquois Q nous faisons correspondre la matrice $B_Q = (b_{ij})$ indexée par les sommets du carquois telle que $b_{ij} = |\{i \rightarrow j\}| - |\{j \rightarrow i\}|$. Cette correspondance existe du fait que les carquois que nous considérons ne contiennent ni boucles ni 2-cycles.

3. Cette terminologie est issue du folklore de la théorie des représentations. Dans les autres théories, une telle donnée est simplement appelée un *graphe orienté*.

- (2) Pour tous sommets k, j dans Q et $r, s, t \geq 0$, on remplace la configuration locale entre i, j et k dans Q comme suit :

dans Q	dans $\mu_i(Q)$
$ \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{r} & j \\ s \searrow & & \nearrow t \\ & i & \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{r+st} & j \\ s \searrow & & \nearrow t \\ & i & \end{array} $
$ \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{r} & j \\ s \searrow & & \nearrow t \\ & i & \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{r-st} & j \\ s \searrow & & \nearrow t \\ & i & \end{array} $

où la notation $i \xrightarrow{n} j$ signifie qu'il y a n flèches allant de i vers j si $n \geq 0$, et $(-n)$ flèches allant de j vers i si $n < 0$.

EXERCICE 1.3. Montrer que pour tout carquois Q et tout sommet i de Q :

- (1) $\mu_i(Q)$ est à nouveau un carquois, c'est à dire qu'il ne contient ni boucles ni 2-cycles ;
- (2) $\mu_i(\mu_i(Q)) = Q$.

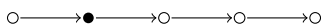
EXEMPLE 1.4. Considérons le carquois constitué d'un seul sommet et (nécessairement) d'aucune flèche. Alors toute mutation de Q laisse Q invariant.

EXEMPLE 1.5. Soit Q le carquois avec deux sommets, notés 1 et 2. Puisque nous ne considérons que des carquois connexes, sans boucles ni 2-cycles, il y a un nombre non-nul de flèches allant ou bien toutes du sommet 1 vers le sommet 2 ou bien toutes du sommet 2 vers le sommet 1. Ainsi, il existe un entier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que

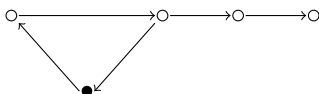
$$Q : 1 \xrightarrow{n} 2.$$

Si on applique une mutation en 1, on obtient le carquois $\mu_1(Q) : 1 \xleftarrow{n} 2$, noté Q^{op} et appelé *carquois opposé*. Il en est de même si on mute en 2. Une récurrence montre alors que les seuls carquois que l'on peut obtenir en appliquant des suites arbitraires de mutation à partir de Q sont Q et Q^{op} .

EXEMPLE 1.6. Considérons le carquois Q suivant :

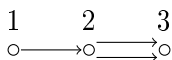


et opérons lui une mutation au second sommet en partant de la gauche, qui apparaît en grisé sur la figure. On obtient alors le carquois



On remarquera notamment que, contrairement aux exemples précédents, le diagramme sous-jacent au carquois a changé sous l'action de la mutation. La mutation ne se contente donc pas de changer le sens des flèches, elle modifie profondément la structure apparente du carquois.

EXERCICE 1.7. Considérer le carquois



et montrer que la suite de mutation $\{(\mu_3\mu_2)^n(Q)\}_{n \geq 1}$ génère une infinité de carquois deux à deux distincts.

DÉFINITION 1.8. On dit que deux carquois Q et Q' sont *équivalents sous mutation* et on note $Q \sim Q'$ si il existe une suite (i_1, \dots, i_n) de sommets de Q telle que $Q' = \mu_{i_n} \circ \dots \mu_{i_1}(Q)$.

EXERCICE 1.9. Montrer que \sim est une relation d'équivalence (*indication* : utiliser l'exercice 1.3).

On note

$$\text{Mut}(Q) = \{Q' \text{ carquois} \mid Q \sim Q'\}.$$

la classe d'équivalence de Q pour la relation \sim , appelée *classe de mutation de Q* .

DÉFINITION 1.10. Un carquois Q est dit *de mutation finie* si $\text{Mut}(Q)$ est un ensemble fini.

Une première observation immédiate est la suivante :

LEMME 1.11. *Un carquois ayant deux sommets est de mutation finie.*

PREUVE. *Cela suit de l'exemple 1.5.*

Comme nous l'avons vu lors de l'exercice 1.7, un carquois Q n'est pas nécessairement de mutation finie. La question de déterminer tous les carquois de mutation finie est alors naturelle. Cependant, la liste de *tous* les carquois de mutation finie est une formulation trop naïve du problème pour être vraiment pertinente. En effet, il est clair que si Q et Q' sont deux carquois équivalents sous mutation, il suit de la définition de $\text{Mut}(Q)$ que $\text{Mut}(Q) = \text{Mut}(Q')$. Aussi, la façon dont on numérote les sommets d'un carquois ne modifie pas la classe d'équivalence de Q , deux carquois obtenus l'un de l'autre à partir d'un changement de numérotation seront dits *isomorphes*. Ainsi, on peut reformuler le problème de la manière suivante :

PROBLÈME 1.12. *Déterminer, à équivalence et à isomorphisme près, tous les carquois de mutation finie.*

Comme nous allons le voir, l'étude du problème 1.12 a évolué sous la forme de questions qui sont devenues de plus en plus précises et que l'on retrouve formulées ici dans les questions 2.3, 3.4, 4.12, 5.2 et enfin 6.1.

2. Les carquois de type Dynkin

Alors que le problème 1.12 n'était pas formulé clairement dans [FZ02], un premier élément de réponse est cependant déjà apparu dans [FZ03], prépublié en 2002 par Fomin et Zelevinsky. Dans cet article, les auteurs étudient des propriétés de finitude des algèbres amassées. De cette analyse naîtra une liste de carquois de mutation finie déjà bien connue des algébristes depuis le milieu du XXème siècle, appelés *carquois de type Dynkin*. C'est en fait l'apparition de cette liste qui va véritablement provoquer un engouement pour les algèbres amassées au début des années 2000. En particulier, c'est cette liste qui va susciter un intérêt plus clair pour le problème 1.12.

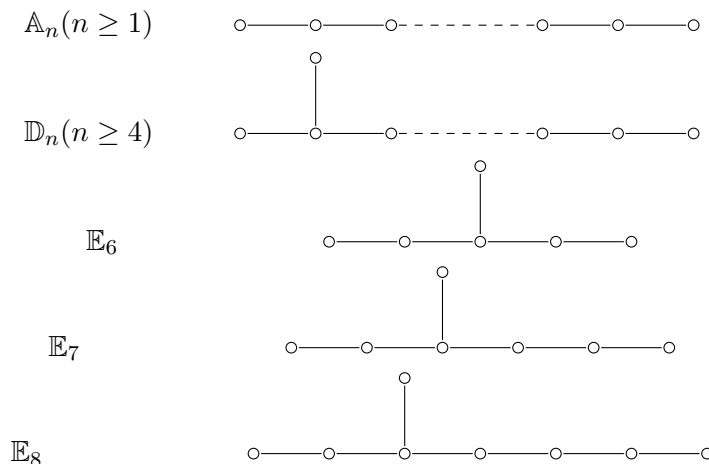


FIGURE 1. Diagrammes de Dynkin

DÉFINITION 2.1. Un carquois Q est dit *de type Dynkin* si il est une orientation de l'un des diagrammes se trouvant dans la figure 1.

THÉORÈME 2.2 (Fomin, Zelevinsky - 2002). *Un carquois de type Dynkin est de mutation finie*

On peut légitimement se demander d'où vient l'idée de regarder les carquois de type Dynkin plutôt que d'autres. Il serait trop long d'expliquer la motivation profonde en quelques lignes et nous dirons simplement que les diagrammes de Dynkin sont des objets combinatoires apparaissant de manière récurrente dans les classifications d'objets mathématiques. Ces diagrammes jouent notamment un rôle prépondérant dans la classification de certaines algèbres non-associatives, appelées *algèbres de Lie*, dont on sait qu'elles entretiennent des liens étroits avec les algèbres amassées. La démonstration du théorème 2.2 proposée dans [FZ03] repose notamment sur cette interaction entre algèbres de Lie et algèbres amassées. Il peut d'ailleurs sembler démesuré de faire appel à une telle théorie pour démontrer un résultat combinatoire comme celui que nous avons proposé mais, tel qu'énoncé, le théorème 2.2 n'est qu'un faible corollaire des résultats de Fomin et Zelevinsky qui s'intéressaient à une problématique bien plus vaste que celle du problème 1.12. Il faut en effet rappeler qu'à ce stade de l'histoire, le problème 1.12 restait encore parfaitement secondaire.

Au regard du théorème 2.2 et du lemme 1.11, on peut naturellement poser la question suivante :

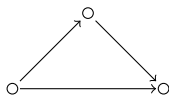
QUESTION 2.3. *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont-ils :*

- (1) *Les carquois à deux sommets ;*

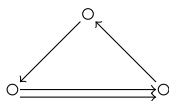
4. Il existe de très nombreux articles traitant du sujet de l'ubiquité des diagrammes de Dynkin en mathématiques, comme cela avait été souligné par Juan Carlos Bustamante lors d'un autre exposé au *Club Mathématique* dédié à cette ubiquité. Pour une introduction à ces diagrammes ainsi qu'à leur rôle en théorie des représentations, le lecteur pourra consulter le très accessible article d'Idun Reiten dans les Notices de l'AMS [Rei97]. Pour une référence plus complète, on pourra se référer à [HHSV77].

(2) Les carquois de type Dynkin ?

EXERCICE 2.4. Considérer le carquois Q suivant :



Montrer qu'à isomorphisme près, les deux seuls carquois contenus dans la classe de mutation de Q sont Q et le carquois



et en déduire que la réponse à la question 2.3 est non.

3. Les carquois affines

Après la prépublication de [FZ03], les algèbres amassées, jusqu'ici essentiellement étudiées aux États-Unis, sont devenues un sujet de recherche pour la communauté mathématique mondiale. Les très nombreuses publications mettent notamment en avant des liens entre les algèbres amassées et la théorie des représentation. Le problème combinatoire 1.12 se fait alors oublier pendant quelques années, jusqu'à ce qu'en 2005, deux norvégiens du nom d'Aslak Bakke Buan et d'Idun Reiten ne prépublient un court article abordant explicitement cette problématique du point de vue de la théorie des représentations [BR06].

Dans cette théorie, la liste de carquois de type Dynkin (Figure 1) admet un prolongement naturel avec une liste de carquois dits *affines* ou *euclidiens* (2).

5. Sergey Fomin est à l'université du Michigan et Andrei Zelevinsky à l'université North-eastern dans le Massachusetts.

6. Aslak Bakke Buan et Idun Reiten sont tous les deux à l'université NTNU de Trondheim.

7. On pourra encore une fois se référer à [Rei97] pour trouver les raisons d'être de cette liste.

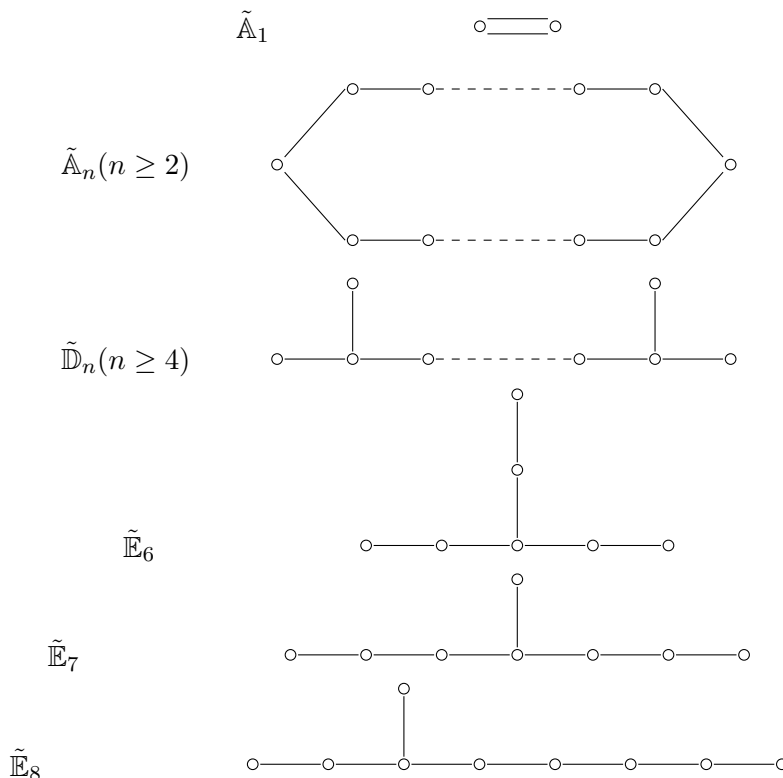


FIGURE 2. Diagrammes affines

DÉFINITION 3.1. Un carquois est dit *de type affine* si il est une orientation de l'un des diagrammes affines se trouvant dans la figure 2 et s'il ne contient pas de cycle orienté.

EXEMPLE 3.2. Le carquois de l'exemple 2.4 est un carquois de type affine \tilde{A}_2 .

Le théorème 2.2 donne une condition suffisante pour qu'un carquois donné soit de mutation finie. Dans [BR06], Buan et Reiten donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un carquois soit de mutation finie, sous réserve qu'une condition d'« acyclicité » soit vérifiée.

THÉORÈME 3.3 (Buan-Reiten, 2005). *Soit Q un carquois ne contenant pas de cycles orientés, alors Q est de mutation finie si et seulement si l'une des trois assertions suivantes est vérifiée :*

- (1) Q a deux sommets ;
- (2) Q est équivalent à un carquois de type Dynkin ;
- (3) Q est équivalent à un carquois de type affine.

8. On prendra garde que pour les carquois de types affines, l'indice désigne le nombre de sommets du diagramme auquel on a soustrait 1, contrairement au cas Dynkin où il désigne le nombre de sommets. Par exemple, dans l'exemple 3.2, un carquois de type \tilde{A}_2 contient bien trois sommets.

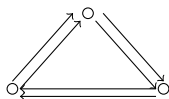
Contrairement à Fomin et Zelevinsky qui abordaient le problème 1.12 de manière détournée dans [FZ03], le théorème 3.3 de Buan et Reiten était le résultat central de [BR06]. Sans le formuler précisément dans leur article, ils posaient implicitement la question 1.12. Et à ce stade, au vu du théorème 3.3, la question 2.3 a donc évolué en la question suivante :

QUESTION 3.4. *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont-ils :*

- (1) *Les carquois à deux sommets ;*
- (2) *Les carquois de type Dynkin ou affine ?*

La réponse à cette question est négative, comme le montre l'exemple suivant :

EXEMPLE 3.5. Au vu du théorème 3.3, il est clair que si l'on cherche à répondre négativement à la question 3.4, il faut trouver un carquois de mutation finie contenant des cycles orientés tel que tous les carquois équivalents sous mutation contiennent aussi des cycles orientés. Si on prend un simple 3-cycle, on voit en faisant une seule mutation, qu'il est de type Dynkin A_3 . L'idée est donc de considérer le carquois suivant :



Une simple vérification (exercice) montre que toute mutation laisse ce carquois invariant. Sa classe de mutation est donc finie mais ce carquois n'est pas équivalent à un carquois de type Dynkin, ni à un carquois de type affine. Cela ne contredit pas pour autant le théorème 3.3 puisque tous les carquois (ou plus exactement le seul) de la classe de mutation contiennent des cycles orientés.

Cependant, cela prouve que la réponse à la question 3.4 est négative.

4. Les carquois géométriques

En 2006, Sergey Fomin, Michael Shapiro et Dylan Thurston ont prépublié une étude systématique des liens existants entre triangulations de surfaces et structures amassées. Dans leur article [FST08b], le problème 1.12 n'est pas central mais une section lui est cependant consacrée.

L'idée de Fomin, Shapiro et Thurston était d'associer un carquois à une surface triangulée à l'aide d'un procédé combinatoire. La généralité de leur construction la rend trop technique pour être reproduite précisément ici. On peut cependant s'en faire une juste idée sur l'exemple des triangulations d'un polygone.

9. Sergey Fomin et Michael Shapiro sont à l'université du Michigan et Dylan Thurston à l'université Columbia.

10. Cette étude est en fait une systématisation d'études précédemment menées par des équipes franco-canadiennes [CCS06] (prépublié en 2004) et franco-américaines [FG06] (prépublié en 2003).

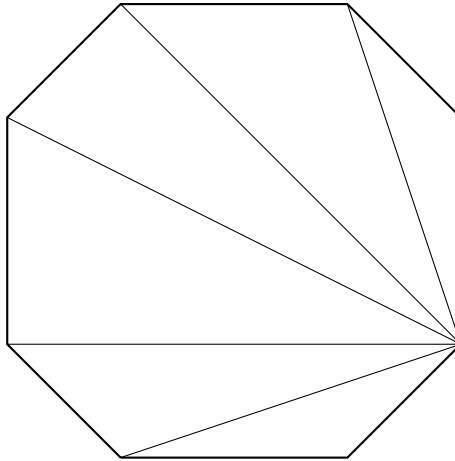
11. Le choix de l'exemple n'est pas anodin car c'est celui considéré dans [CCS06] et qui a motivé les travaux de Fomin, Shapiro et Thurston.

4.1. Triangulations d'un polygone

On se fixe dorénavant un polygone Π ayant un nombre $n \geq 3$ de côtés.

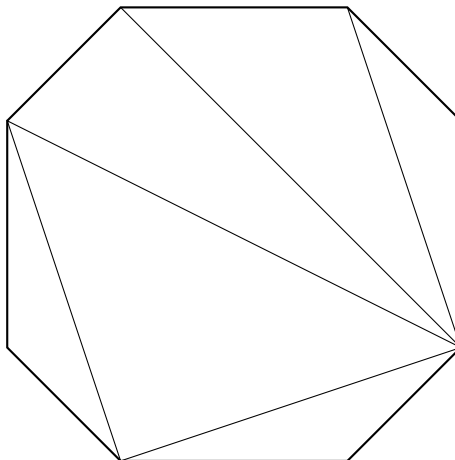
DÉFINITION 4.1. Une *triangulation* de Π est un ensemble T de diagonales de Π découpant la surface en triangles et ne s'intersectant pas deux à deux.

EXEMPLE 4.2. Soit Π un octogone régulier. Une triangulation de Π est par exemple donnée par la collection T de diagonales suivante :



On remarquera qu'étant donnée une triangulation T de Π et une diagonale $d \in T$, si on enlève d de T , on obtient un quadrilatère Q dans Π dont d était l'une des diagonales. Si d' désigne l'autre diagonale de Q , alors $T \setminus \{d\} \sqcup \{d'\}$ donne une nouvelle triangulation de Π . On note $f_d(T)$ la triangulation ainsi obtenue et l'opération consistant à remplacer T par $f_d(T)$ est appelée *flip en d de T* .

EXEMPLE 4.3. Si dans l'exemple ci-dessus on effectue un flip en la diagonale située en deuxième à partir du bas, on obtient la nouvelle triangulation T' suivante :



On remarquera que toutes les triangulations de Π ont le même nombre de diagonales (égal à $n - 3$ dans le cas d'un n -gone). C'est un résultat qui reste vrai pour des surfaces arbitraires.

4.2. Le carquois associé à une triangulation

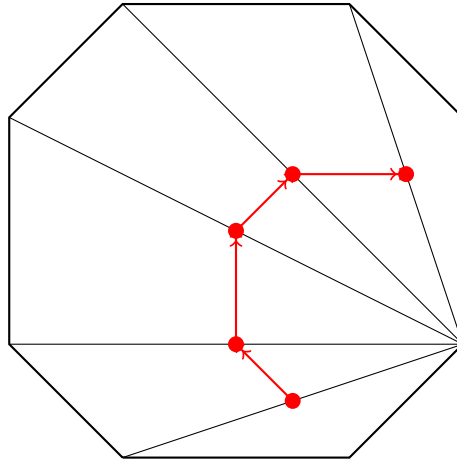
Suivant une idée de Philippe Caldero, Frédéric Chapoton et Ralf Schiffler, Fomin, Shapiro et Thurston ont associé à toute triangulation T d'une surface Σ un carquois Q_T . Dans le cas du n -gone que nous présentons ci-dessous, la construction est celle initialement présentée dans [CCS06].

Soit T une triangulation de Π . On se fixe une numérotation $\{1, \dots, n - 3\}$ des diagonales dans T . Les sommets du carquois Q_T sont alors indexés par l'ensemble $\{1, \dots, n - 3\}$, en d'autres termes, ils sont indexés par les diagonales dans T . Étant données deux diagonales i et j de la triangulation T qui bordent un même triangle Δ , on place une flèche de i vers j si, en faisant le pivot dans Π autour du point d'intersection de i et j dans le sens horaire, on passe d'abord par i puis par l'intérieur de Δ puis par j . On fait cela pour toutes les diagonales de T et on obtient ainsi un carquois Q_T ayant $n - 3$ sommets.

REMARQUE 4.4. On remarquera de plus qu'une diagonale d appartenant à une triangulation T ne peut appartenir qu'à au plus deux triangles formés par T . En conséquence, pour tout sommet i de Q_T , il existe au plus deux flèches sortant ou rentrant dans i .

DÉFINITION 4.5. Un carquois Q est dit *de type géométrique* si il existe une surface Σ et une triangulation T de Σ telle que $Q = Q_T$.

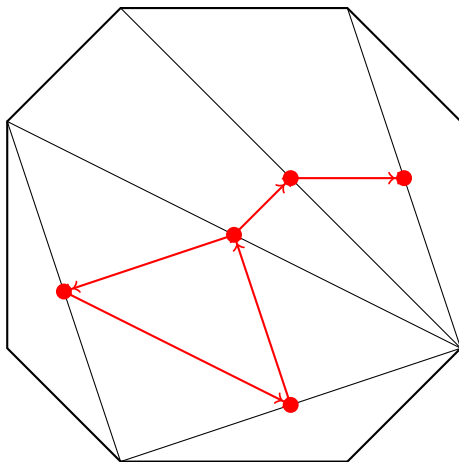
EXEMPLE 4.6. Si on reprend la triangulation T de l'octogone régulier de l'exemple 4.2, on obtient le carquois Q_T suivant :



et pour la triangulation T' de l'exemple 4.3, on obtient le carquois suivant :

12. Par surface arbitraire, nous entendons une surface de Riemann orientable de dimension 2, connexe et à bord. Dans ce cadre, le résultat découle du fait que le nombre de « diagonales » dans une triangulation dont le nombre de sommets est fixé est déterminé par la caractéristique d'Euler de la surface. Pour plus de détails sur le cadre général, on pourra se référer à [FST08b].

13. Philippe Caldero et Frédéric Chapoton sont à l'université de Lyon en France et Ralf Schiffler était alors à l'université Carleton à Ottawa.



4.3. Mutations et flips

L'un des résultats clés de [FST08b] consiste à observer que muter le carquois Q_T associé à une triangulation T d'une surface en un sommet d consiste à prendre le carquois $Q_{T'}$ de la triangulation obtenue en effectuant un flip de T en la diagonale d . De manière plus formelle, le résultat s'énonce comme suit :

THÉORÈME 4.7 (Fomin-Shapiro-Thurston, 2006). *Soit Σ une surface, T une triangulation de Σ . Alors pour toute diagonale d de T*

$$\mu_d(Q_T) = Q_{f_d(T)}.$$

EXEMPLE 4.8. Le carquois Q_T obtenu à partir de la triangulation T de l'octogone proposée dans l'exemple 4.2 est le carquois de type A_5 considéré à l'exemple 1.6. Les exemples 4.6 et 1.6 illustrent ainsi le théorème 4.7.

Du point de vue du problème 1.12 qui nous concerne, le corollaire essentiel est le suivant :

COROLLAIRE 4.9. *Un carquois de type géométrique est de mutation finie.*

PREUVE. *Dans le cas d'un polygone Π , il n'existe qu'un nombre fini de triangulations de Π . Puisque muter le carquois Q_T revient à prendre le carquois d'une autre triangulation de Π , il est clair que le nombre de carquois obtenus sera aussi fini.*

Dans le cas d'une surface arbitraire Σ , il peut exister une infinité de triangulations. Cependant, pour toute triangulation T de Σ nous avons vu qu'en chaque sommet i de Q_T , il y a au plus deux flèches sortant et deux flèches rentrant dans i . Le nombre de carquois que l'on peut obtenir à partir de triangulations est donc borné par k^5 où k est le nombre de diagonales dans une triangulation, qui est fixe et fini. En particulier, le nombre de carquois que l'on peut obtenir est fini.

Certains carquois de mutation finie que nous avons précédemment construits sont en fait de types géométriques. Plus précisément, on a le résultat suivant :

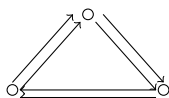
PROPOSITION 4.10 (Fomin-Shapiro-Thurston, 2006). (1) *Les carquois de types $A, D, \tilde{A}, \tilde{D}$ sont géométriques.*

(2) *Les carquois de types E_n et \tilde{E}_n pour $n = 6, 7, 8$ ne sont pas géométriques.*

(3) *Les carquois à deux sommets ayant $n > 2$ flèches ne sont pas géométriques.*

Cependant, l'ensemble des carquois géométriques contient aussi des carquois de mutation finie que nous n'avons pas précédemment classifiés, comme le montre l'exemple suivant.

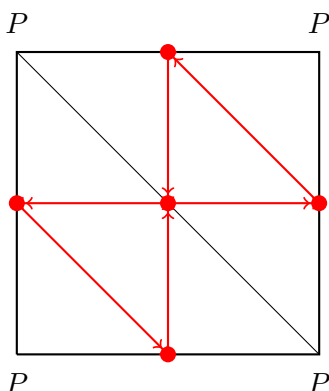
EXEMPLE 4.11. Le carquois



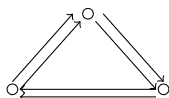
de l'exemple 3.5 est de type géométrique. Pour le montrer il faut utiliser une surface un peu plus compliquée qu'un simple polygone régulier et, faute de pouvoir donner une explication formelle, nous allons tenter de se donner une intuition du résultat.

La surface à considérer est un *tore*, autrement une surface topologiquement équivalente à un « *donut* » avec un point marqué P . La notion de diagonale dans un polygone est ici remplacée par la notion d'arc sans auto-intersection joignant P à P , considéré à déformation continue près. Une manière simple de se représenter un tore avec un point marqué est de considérer un quadrilatère régulier dont on a identifié les deux bords horizontaux et les deux bords verticaux (si vous n'êtes pas convaincu, prenez une feuille de papier et faites les collages) et dont le point marqué P est identifié avec les coins du quadrilatère.

On peut alors obtenir une triangulation du tore en prenant pour « diagonales » les côtés du quadrilatère ainsi que l'une de ses « vraies » diagonales. Le carquois Q_T obtenu est alors le suivant :



mais puisque les deux bords verticaux sont identifiés et les deux bords horizontaux sont aussi identifiés, il faut identifier les sommets correspondant dans le carquois Q_T et on obtient



et le carquois de l'exemple 3.5 est donc bien de type géométrique.

Ainsi, la question 3.4 devient :

QUESTION 4.12. *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont-ils :*

- (1) Les carquois à deux sommets ;
- (2) Les carquois de type \mathbb{E}_n et $\tilde{\mathbb{E}}_n$ pour $n = 6, 7, 8$.
- (3) Les carquois de types géométriques ?

5. Les carquois elliptiques

Dans [FST08b], les auteurs ont aussi répondu négativement à la question 4.12 en observant trois carquois de mutation finie n'appartenant pas à la précédente liste. Ces trois nouveaux carquois sont appelés *elliptiques* de type \mathbb{E} .

DÉFINITION 5.1. Un carquois est dit *elliptique de type \mathbb{E}* si c'est un orientation d'un diagramme de type $\mathbb{E}_6^{(1,1)}$, $\mathbb{E}_7^{(1,1)}$ ou $\mathbb{E}_8^{(1,1)}$ dans la figure 3 et si tous ses triangles sont orientés.

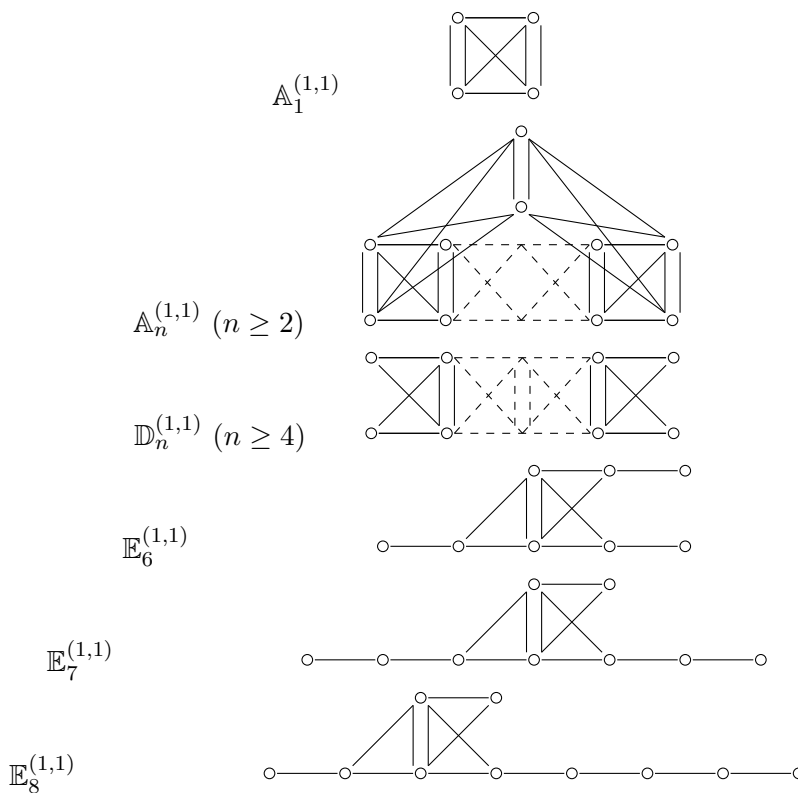


FIGURE 3. Diagrammes elliptiques

En géométrie algébrique, la notion de carquois elliptique peut être vue comme un prolongement de la suite Dynkin-affine. Il existe ainsi des carquois elliptiques de type \mathbb{A} , notés $\mathbb{A}_n^{(1,1)}$, de type \mathbb{D} , notés $\mathbb{D}_n^{(1,1)}$ et trois carquois de type \mathbb{E} elliptiques.

14. Les carquois elliptiques ont été introduits par un chercheur japonais du nom de Kyoji Saito. Le lecteur expérimenté pourra par exemple consulter [Sai85] pour plus de détails.

De ce fait, il peut sembler naturel que si les carquois elliptiques de type \mathbb{E} apparaissent dans la liste des carquois de mutation finie puisque les carquois Dynkin \mathbb{E} et affines \mathbb{E} y apparaissent aussi. Mais on s'attendrait alors à ce que les carquois elliptiques de types $\mathbb{A}^{(1,1)}$ et $\mathbb{D}^{(1,1)}$ soient de mutation finie, si ce n'est géométriques. Or il est facile de vérifier que, mis à part $\mathbb{D}_4^{(1,1)}$ qui est de type géométrique, tous les carquois de type $\mathbb{A}_n^{(1,1)}$ et $\mathbb{D}_n^{(1,1)}$ sont de mutation infinie !

Les carquois elliptiques de type \mathbb{E} semblaient donc apparaître dans la liste des carquois de mutation finie de manière « accidentelle ». Les calculs directs ont montré que ces carquois n'étaient pas de types géométriques mais possédaient des classes de mutation finies (les cardinalités de ces classes, à isomorphismes de carquois près, sont de 49 pour $\mathbb{E}_6^{(1,1)}$, de 506 pour $\mathbb{E}_7^{(1,1)}$ et de 5739 pour $\mathbb{E}_8^{(1,1)}$). Il faudra attendre trois années pour qu'en 2009, Michael Barot et Christof Geiss de l'UNAM au Mexique ne prépublient un argument profond éclairant le fait que les carquois de types $\mathbb{E}^{(1,1)}$ sont de mutation finie [BG09]. Ces arguments font appel à la fois à la théorie des représentations et à la géométrie algébrique. Cependant, ces arguments n'expliquent pas fondamentalement pourquoi les carquois de type $\mathbb{E}^{(1,1)}$ apparaissent alors que les carquois de types $\mathbb{A}^{(1,1)}$ et $\mathbb{D}^{(1,1)}$ n'apparaissent pas.

La question 4.12 devient alors la question suivante, formellement posée dans [FST08b, Problem 12.7] :

QUESTION 5.2. *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont-ils :*

- (1) *Les carquois à deux sommets ;*
- (2) *Les carquois de type \mathbb{E}_n , $\tilde{\mathbb{E}}_n$ et $\mathbb{E}_n^{(1,1)}$ pour $n = 6, 7, 8$.*
- (3) *Les carquois de types géométriques ?*

6. Les exemples de Derksen et Owen

En avril 2008, soit un peu moins de deux ans après la prépublication de [FST08b], Harm Derksen et Theodore Owen ont montré dans une courte prépublication que la liste proposée à la question 5.2 devait encore être enrichie de deux exemples très simples. Ces exemples sont donnés par les carquois obtenus en prenant une orientation de l'un des deux diagrammes de la liste en figure 4 de sorte que tous les cycles soient orientés.

Il peut sembler étonnant qu'il ait fallu presque deux ans pour trouver des exemples aussi simples mais ces exemples n'apparaissent clairement que si on prend le temps de réfléchir explicitement à la question 4.12. Or cette question était plutôt en marge du reste du développement de la théorie des algèbres amassées. De plus, si il est facile de montrer que les carquois \mathbb{X}_6 et \mathbb{X}_7 sont de mutation finie, il est tout de même moins aisé de montrer que ces carquois ne sont pas dans la liste précédemment obtenue.

Ainsi, la question 5.2 se précise finalement en la question suivante, posée par Derksen et Owen [DO08, Problem 15] :

15. Harm Derksen et Theodore Owen sont tous les deux à l'université du Michigan aux États-Unis.

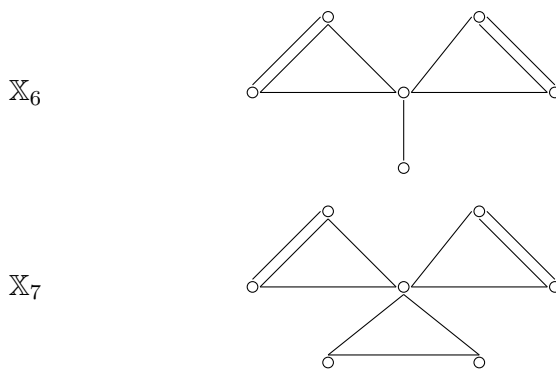


FIGURE 4. Diagrammes de Derksen et Owen

QUESTION 6.1. *Est-il vrai qu'à équivalence près, les carquois de mutation finie sont :*

- (1) *Les carquois à deux sommets ;*
- (2) *Les carquois de types géométriques ;*
- (3) *Les carquois de types \mathbb{E}_n , $\tilde{\mathbb{E}}_n$ et $\mathbb{E}_n^{(1,1)}$ pour $n = 6, 7, 8$;*
- (4) *Les carquois de types \mathbb{X}_6 et \mathbb{X}_7 ?*

On remarquera au passage que, sans aller jusqu'à énoncer une conjecture formelle, les auteurs faisaient preuve d'un certain optimisme puisqu'ils énoncèrent la question précisément sous la forme rapportée ici.

7. La classification de Felikson, Shapiro et Tumarkin

C'est finalement en novembre 2008 que le problème est définitivement résolu dans une prépublication mise en ligne par Anna Felikson, Michael Shapiro et Pavel Tumarkin [FST08a]. La réponse à la question 6.1 est positive, autrement dit :

THÉORÈME 7.1 ([FST08a]). *A équivalence près, les carquois de mutation finie sont :*

- (1) *Les carquois à deux sommets ;*
- (2) *Les carquois de types géométriques ;*
- (3) *Les carquois de types \mathbb{E}_n , $\tilde{\mathbb{E}}_n$ et $\mathbb{E}_n^{(1,1)}$ pour $n = 6, 7, 8$;*
- (4) *Les carquois de types \mathbb{X}_6 et \mathbb{X}_7 .*

La preuve présentée dans [FST08a] se fonde sur une analyse combinatoire poussée. La stratégie consiste à montrer que si un carquois est de mutation finie, alors il vérifie certaines conditions locales qui vont permettre de le rattacher à l'une des classes de carquois de mutation finie déjà construite. L'analyse était

16. Anna Felikson est à l'université de Moscou en Russie, Michael Shapiro à l'université du Michigan aux États-Unis et Pavel Tumarkin à l'université de Brême en Allemagne.

non-triviale puisqu'il a fallu pas moins de 49 pages aux auteurs pour arriver à cette preuve.

A l'heure où ces lignes sont écrites, l'article n'est pas encore officiellement paru dans une revue mathématique mais il a déjà reçu l'approbation de l'ensemble de la communauté mathématique.

8. Une fin ou un commencement ?

À strictement parler le problème 1.12 est donc maintenant résolu. Est-ce pour autant qu'une page des mathématiques se tourne ? La réponse à cette question est bien évidemment non ; une résolution de problème amène souvent plus de questions qu'elle n'a apporté de réponses.

8.1. Critère déterministe

Grâce au théorème de Felikson-Shapiro-Tumarkin, nous disposons maintenant d'une classification des carquois dont la classe de mutation est finie. Cependant, ce théorème ne permet pas de reconnaître en pratique si un carquois donné est de mutation finie ou non. Dans [FST08b], Sergey Fomin, Michael Shapiro et Dylan Thurston ont proposé une méthode pour reconnaître un carquois de type géométrique mais sur des carquois complexes, cette reconnaissance reste difficile à mettre en oeuvre.

Il existe à l'heure actuelle certains outils informatiques utiles pour reconnaître assez rapidement si un carquois est de mutation finie ou non (voir par exemple [DP10]) mais ils requièrent d'effectuer un certain (parfois grand) nombre de mutations à partir du carquois donné pour pouvoir trancher. Théoriquement, il devrait exister un critère pour reconnaître si un carquois Q donné est de mutation finie sans lui appliquer de mutation. Trouver un tel critère viendrait donc compléter le théorème de Felikson-Shapiro-Tumarkin en vue de son éventuelle application pratique.

8.2. Calcul de cardinalités

La combinatoire est souvent utile pour trouver des liens entre des domaines mathématiques apparemment disjoints. Ainsi, si un carquois Q est de mutation finie, le cardinal $m(Q)$ de sa classe de mutation peut être un nombre intéressant à connaître car il pourrait permettre d'établir des bijections naturelles entre les classes de mutation de carquois et d'autres objets mathématiques. Par exemple, si Q est un carquois de type géométrique associé à une surface Σ , le nombre $m(Q)$ donne des informations sur les triangulations possibles de Σ . Il est donc intéressant de pouvoir calculer ces nombres en général.

8.3. Généralisation

17. Des exemples de calculs, effectués à l'aide du logiciel QME [DP10], sont par exemple disponibles dans [Dup08, Annexe A] et des formules explicites ont notamment été obtenues pour tous les carquois de type Dynkin \mathbb{A} [Tor08] et de type Dynkin \mathbb{D} [BT09].

Dans cet exposé, nous nous sommes restreint aux carquois. Une théorie analogue peut être définie pour des graphes orientés munis de valuations. Le problème de la classification des graphes valués orientés de mutation finie est resté un problème ouvert jusqu'à très récemment. Ahmet Seven, avait notamment obtenu l'analogue du théorème 3.3 pour les graphes valués. L'analogue du théorème 7.1 a finalement été obtenu par les mêmes auteurs dans une récente prépublication datée de juin 2010 [FST10].

8.4. Conceptualisation

« *Prédire n'est pas expliquer* » nous dit René Thom dans son excellent livre d'entretiens [Tho09]. Cette phrase d'un médaillé Fields s'attache à souligner la différence entre une théorie qui apporte des résultats quantitatifs explicites et une théorie qui apporte un éclairage qualitatif. Cette opposition fondamentale en sciences peut aussi s'adapter à notre étude en ce sens que la preuve existante de la classification de Felikson-Shapiro-Tumarkin répond clairement à un problème posé sans apporter d'éclairage théorique profond. Un tel éclairage n'est pourtant pas superflu. Ce qui intéresse généralement le mathématicien n'est pas tant le résultat lui-même que sa raison d'être.

Bien sûr, il est toujours nécessaire dans un premier temps d'établir la véracité des énoncés, quelle que soit la méthode. Souvent les premières preuves des grands énoncés ne sont pas très élégantes mais, une fois les énoncés établis, des mathématiciens travaillent souvent à comprendre plus profondément les résultats et ce n'est pas là une tâche inutile. En effet, pour le cas qui nous concerne, la découverte d'une nouvelle preuve mettant en jeu des interactions avec d'autres domaines mathématiques ou donnant un cadre unificateur apporterait une meilleure compréhension du problème.

De manière générale en mathématiques, toutes nouvelles interactions, tous nouveaux objets suffisamment généraux sont générateurs de nouvelles idées et, pour être « *efficace* » en science, une théorie doit être porteuse de cette « *générativité conceptuelle* » [Lam09, CC89] dont on voit bien qu'elle manque encore à la résolution du problème que nous avons choisi d'étudier. C'est d'ailleurs cette générativité qui a fait le succès de la découverte des algèbres amassées par Fomin et Zelevinsky, dont le problème que nous venons d'analyser n'est qu'un infime sous-produit.

Références

- [BFZ05] Arkady Berenstein, Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras III : Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Mathematical Journal*, 126(1) :1–52, 2005. MR2110627 (2005i :16065).
- [BG09] Michael Barot et Christof Geiss. Tubular cluster algebras I : categorification. *arXiv :0905.0028v1 [math.RT]*, 2009.

18. Dans la terminologie classique, ce cas est appelé *non-simplement-lacé*. Dans le formalisme de [FZ02], le cas des carquois, c'est à dire des graphes orientés sans valuations, correspond aux mutations de matrices anti-symétriques. Le cas des graphes orientés valués correspond aux mutations de matrices anti-symétrisables, c'est à dire de matrices $B \in M_n(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que DB est anti-symétrique.

19. Ahmet Seven est à la *Middle East Technical University* à Ankara en Turquie.

- [BR06] Aslak Bakke Buan et Idun Reiten. Acyclic quivers of finite mutation type. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 12804, 10, 2006.
- [BT09] Aslak Bakke Buan et Hermund André Torkildsen. The number of elements in the mutation class of a quiver of type D_n . *Electron. J. Combin.*, 16(1) :Research Paper 49, 23, 2009.
- [CC89] Jean-Pierre Changeux et Alain Connes. *Matière à penser*. Odile Jacob, 1989.
- [CCS06] Philippe Caldero, Frédéric Chapoton et Ralf Schiffler. Quivers with relations arising from clusters (A_n case). *Transactions of the AMS*, 358 :1347–1354, 2006. MR2187656 (2007a :16025).
- [DO08] Harm Derksen et Theodore Owen. New graphs of finite mutation type. *Electron. J. Combin.*, 15(1) :Research Paper 139, 15, 2008.
- [DP10] Grégoire Dupont et Matthieu Pérotin. Quiver Mutation Explorer. <http://pages.usherbrooke.ca/gdupont2/QME>, 2010.
- [Dup08] Grégoire Dupont. *Algèbres amassées affines*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338684/fr>, novembre 2008.
- [FG06] Vladimir Fock et Alexander Goncharov. Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (103) :1–211, 2006.
- [FST08a] Anna Felikson, Michael Shapiro et Pavel Tumarkin. Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type. *arXiv :0811.1703v1 [math.CO]*, 2008.
- [FST08b] Sergey Fomin, Michael Shapiro et Dylan Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes. *Acta Math.*, 201(1) :83–146, 2008.
- [FST10] Anna Felikson, Michael Shapiro et Pavel Tumarkin. Cluster algebras of finite mutation type via unfoldings. *arXiv :1006.4276v2 [math.CO]*, 2010.
- [FZ02] Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras I : Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15 :497–529, 2002. MR1887642 (2003f :16050).
- [FZ03] Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras II : Finite type classification. *Inventiones Mathematicae*, 154 :63–121, 2003. MR2004457 (2004m :17011).
- [FZ07] Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky. Cluster algebras IV : Coefficients. *Composition Mathematica*, 143(1) :112–164, 2007. MR2295199 (2008d :16049).
- [HHSV77] Michael Hazewinkel, Wim Hesselink, Dirk Siersma et Ferdinand Veldkamp. The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the $A - D - E$ problem). *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 25(3) :257–307, 1977.
- [Lam09] Dominique Lambert. L’incroyable efficacité des mathématiques. *La recherche*, 316 :48–55, 2009.
- [Ngu07] Bertrand Nguefack. Introduction aux algèbres amassées : Définitions et exemples. *Rapports de recherche de l’université de Sherbrooke*, 41 :1–33, 2007.
- [Rei97] Idun Reiten. Dynkin diagrams and the representation theory of algebras. *Notices Amer. Math. Soc.*, 44(5) :546–556, 1997.
- [Sai85] Kyoji Saito. Extended affine root systems. I. Coxeter transformations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 21(1) :75–179, 1985.
- [Sin99] Simon Singh. *Le dernier théorème de Fermat*. Hachette, 1999.
- [Szp09] George Szpiro. *La Conjecture de Poincaré*. Points, 2009.
- [Tho09] René Thom. *Prédire n’est pas expliquer*. Flammarion, 2009.
- [Tor08] Hermund André Torkildsen. Counting cluster-tilted algebras of type A_n . *Int. Electron. J. Algebra*, 4 :149–158, 2008.